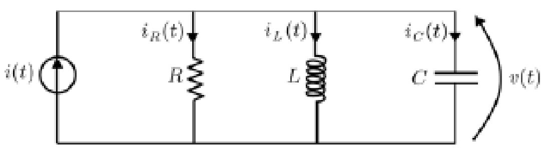
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - CAMPUS SERRA

Sistemas Dinâmicos

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Serra

Para controlar é preciso conhecer

- Sistemas dinâmicos



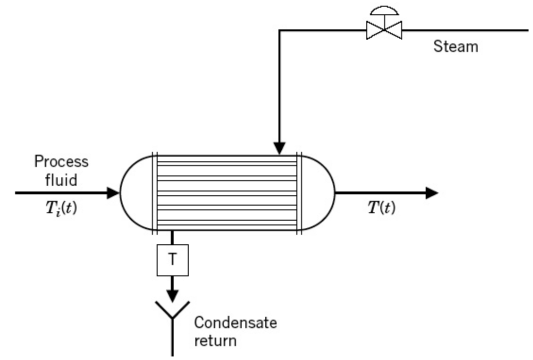
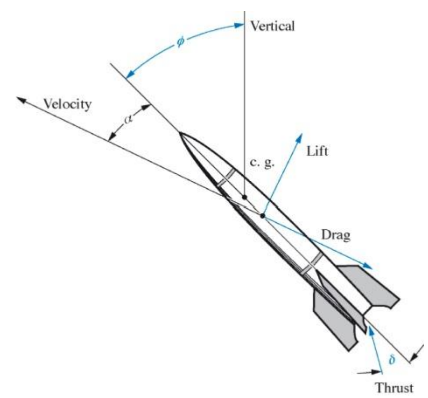
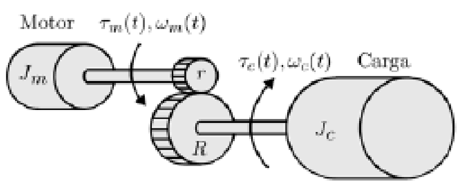
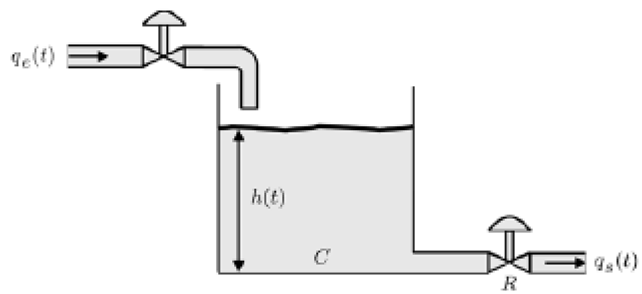


Figure 1-1.1 Heat exchanger.







Modificam-se no decorrer do tempo

Modelos matemáticos

- Método analítico (Leis físicas)
  - Equações diferenciais,...

- Método experimental (Identificação)
  - Mínimos quadrados,...

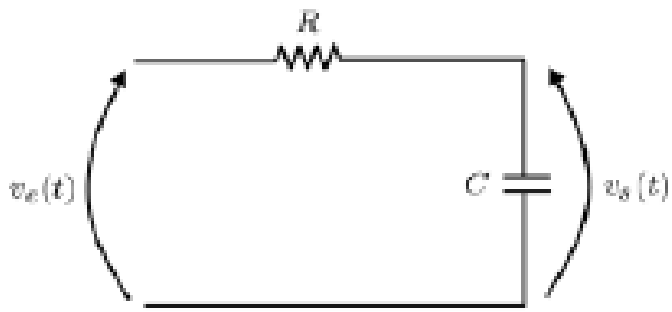
★ Menor complexidade do modelo é melhor, sem prejudicar a representação da dinâmica

Equações diferenciais (domínio tempo)

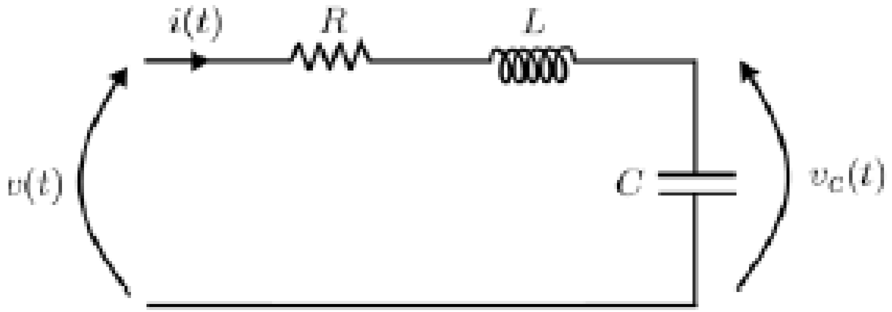
- Equações diferenciais de primeira ordem e segunda ordem
  - Equação característica determina o comportamento
- Equações diferenciais de ordem maior

Exercicios

- Circuitos elétricos (leis físicas, idealizações)



R= 1 Kohm
C= 2 mF
Vc(0)= 0 V
Vf(t)= 15u(t)



L= 1H
C= ½F
R= 3 ohm
Vc(0)= 10 V
i(0)= 0 A
Vf(t)= 15u(t); e outras formas

Transformada de Laplace (domínio frequência complexa)

- Importância para o controle
  - As equações do sistema dinâmico são manipuladas algebricamente
  - Funções de transferência e representação em diagrama de blocos

★ Restrita aos sistemas lineares (ou linearizáveis num ponto) invariantes no tempo - SLIT

Transformada de Laplace

- Definição

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) * e^{-st} * dt$$

$$Se \quad f(t) = A * e^{-\alpha t} \quad Então \quad F(s) = \frac{A}{s+\alpha}$$

- Propriedades

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s.F(s)$$ TEOREMA DO VALOR FINAL

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s.F(s)$$ TEOREMA DO VALOR INICIAL

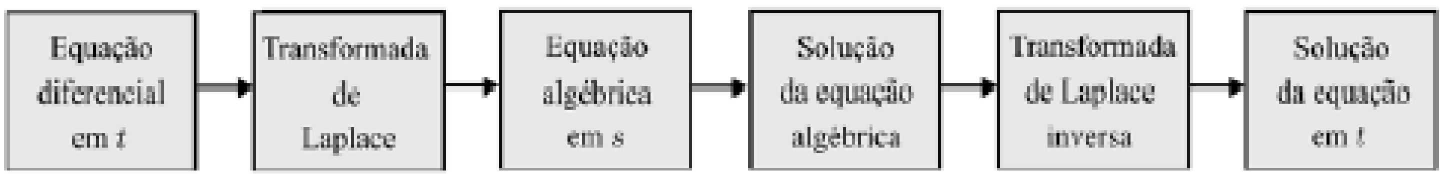
$$L\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = s^n * F(s) - s^{n-1} f(0) - .. - f^n(0)$$

Table 2-1.1 Laplace transforms of common functions

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Transformada de Laplace

- Solução de equações diferenciais
  - Transformada inversa de Laplace



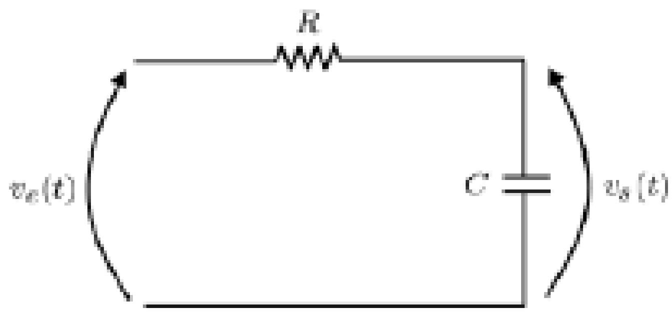
assumindo c.i's nulas

$$a_2\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=b_1\dot{u}(t)+b_0u(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y(s)=\frac{b_1s+b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}\bullet U(s)$$

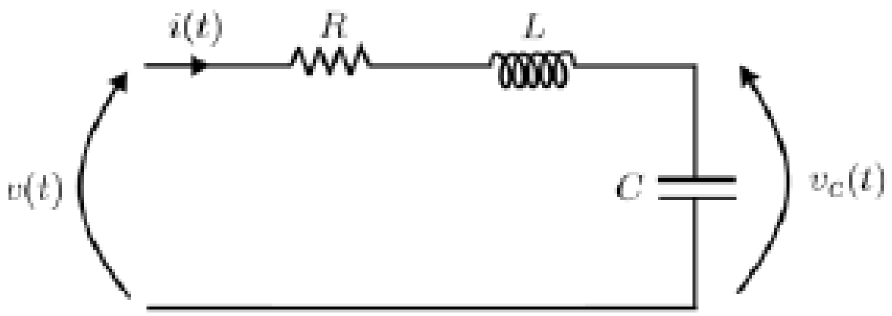
★ Método das frações parciais

Exercicios

- Circuitos elétricos



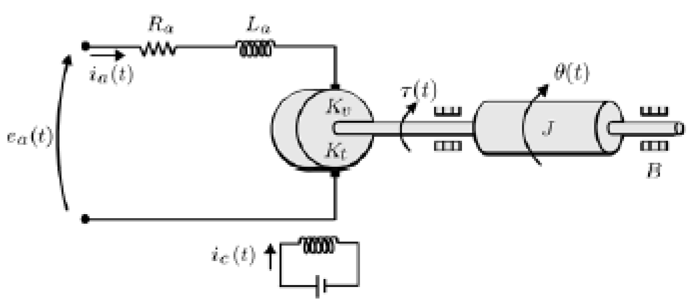
R= 1 Kohm
C= 2 mF
Vc(0)= 0 V
Vf(t)= 15u(t)

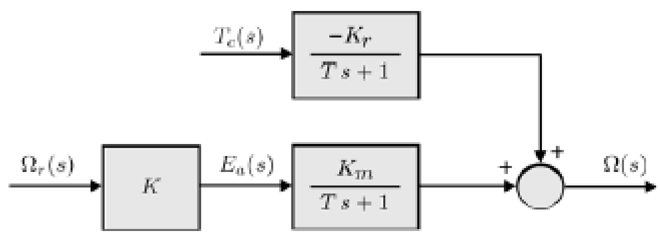


L= 1H
C= ½F
R= 3 ohm
Vc(0)= 10 V
i(0)= 0 A
Vf(t)= 15u(t)

Transformada de Laplace

- Funções de transferência e diagrama de blocos
  - Motor de corrente continua





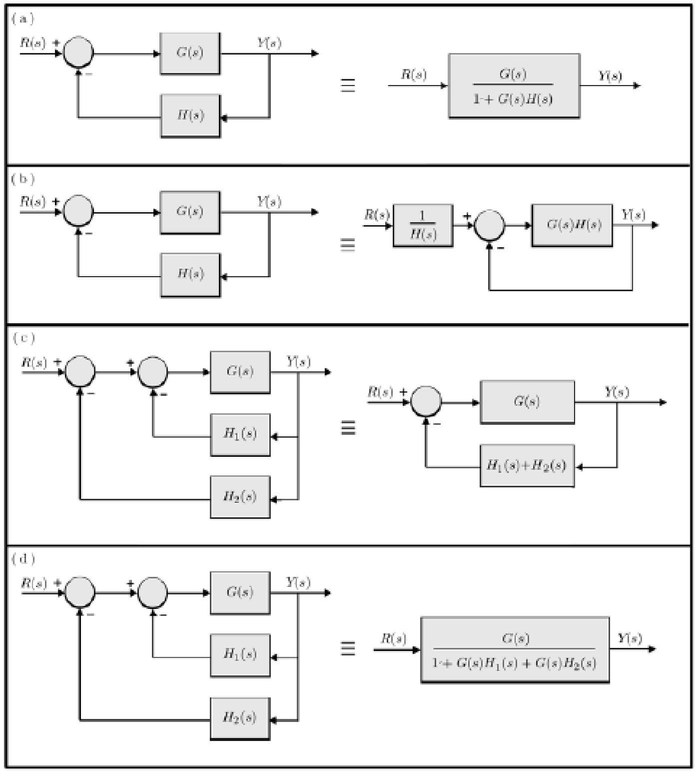
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

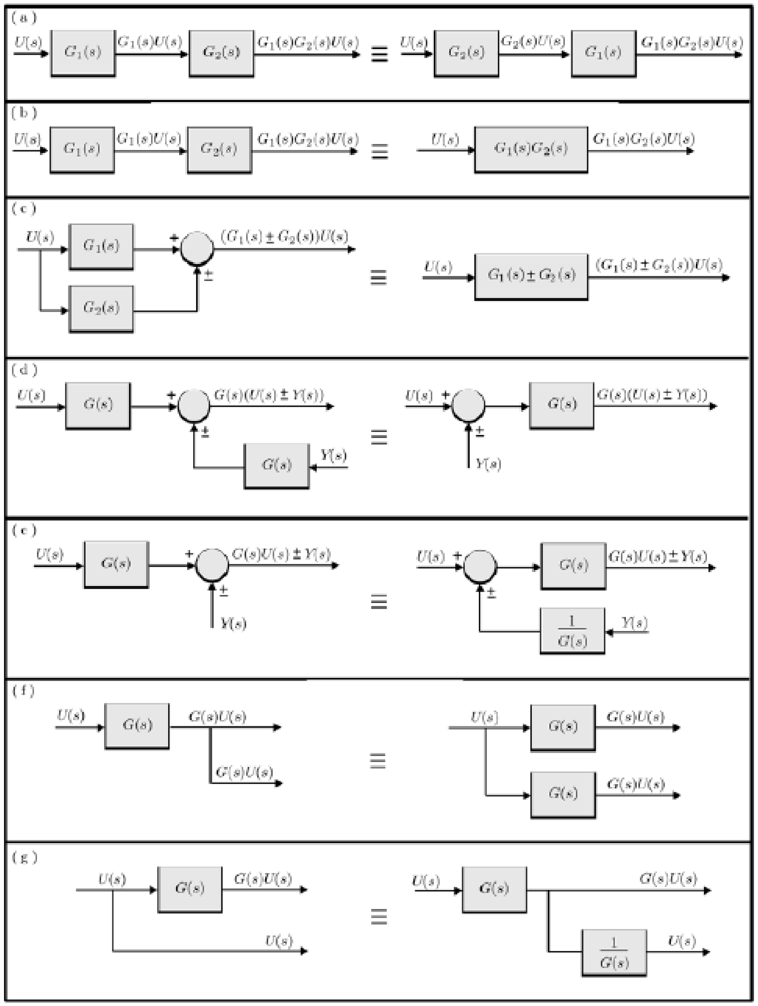
$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

Pólos e zeros de uma função de transferência

Transformada de Laplace

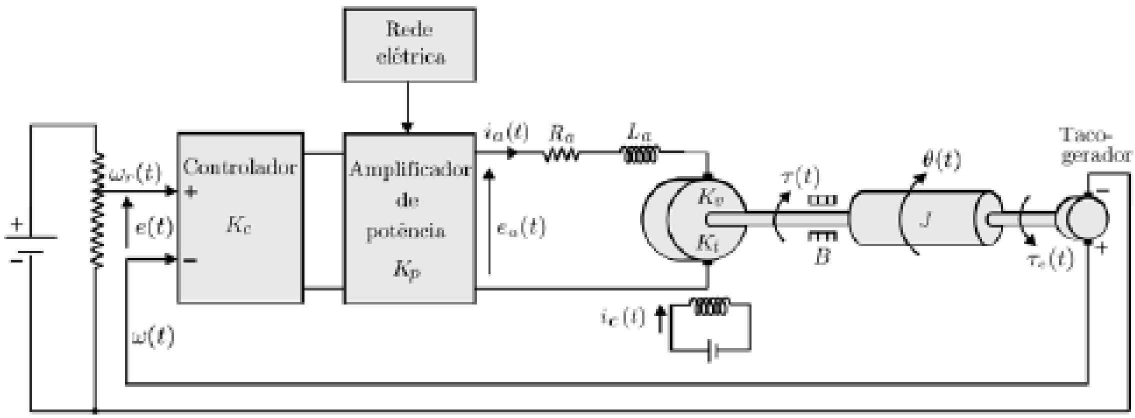
- Álgebra de blocos

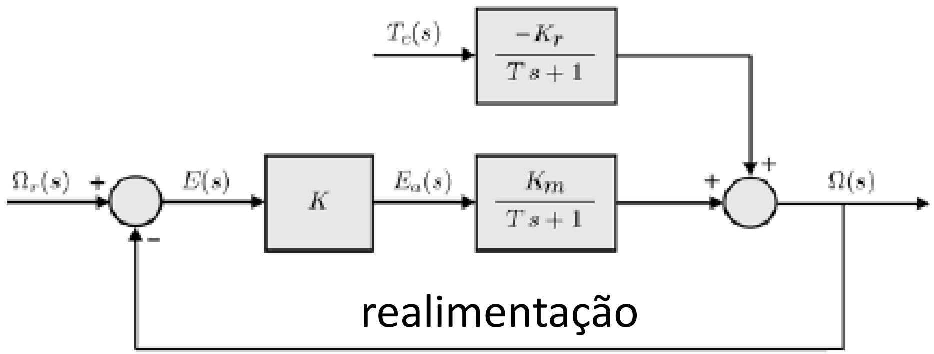




Exercicios

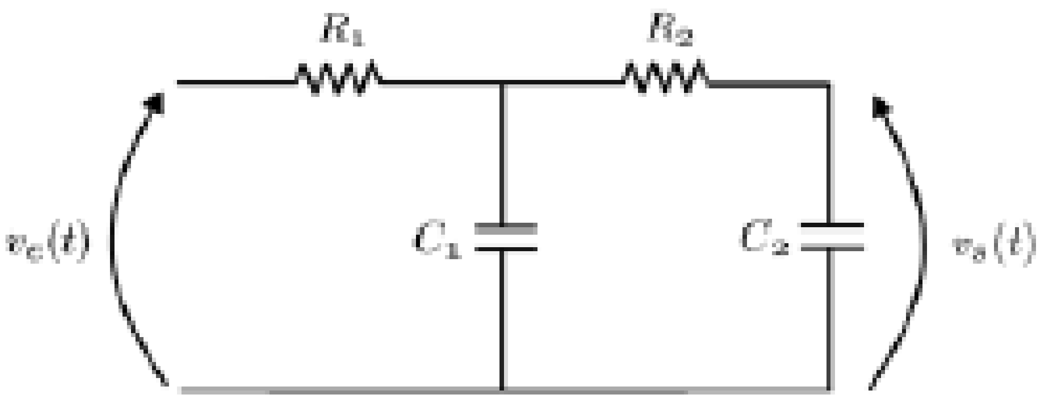
- Motor de corrente continua em malha fechada





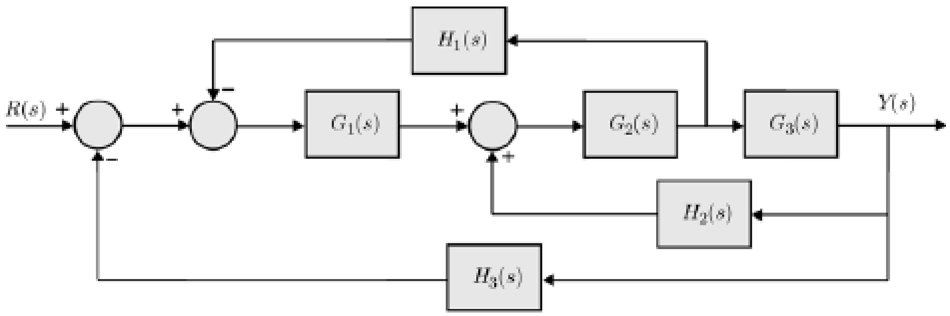
Exercicios

- Encontre Vs(s)/Vc(s) do circuito abaixo

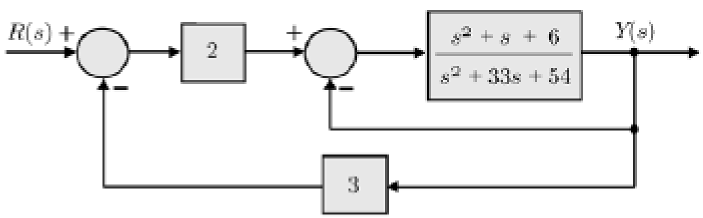


Exercicios

- Álgebra de blocos

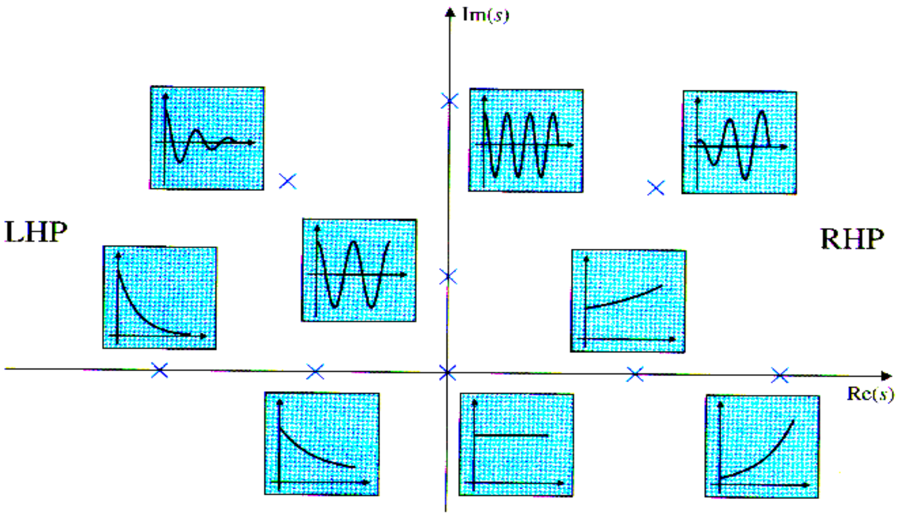


- Determine Y(s)/R(s); encontre y(t) para r(t) sendo um degrau unitário; encontre y(0) e y(∞).



Transformada de Laplace

- Efeito da localização dos polos da FT; são os polos que definem o comportamento

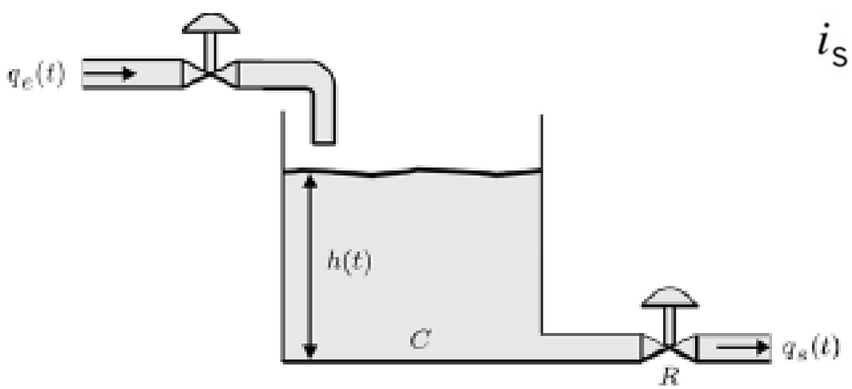


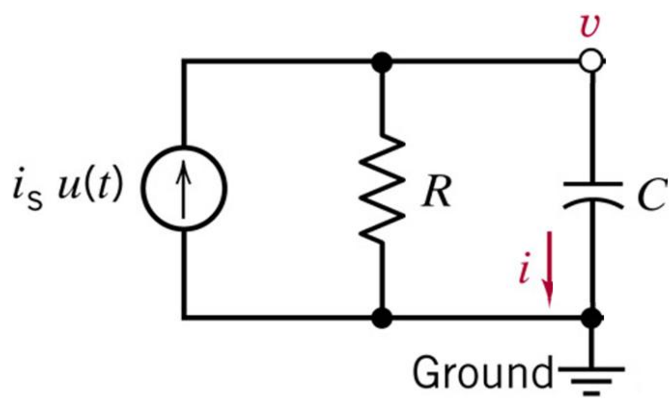
Lembrar da equação característica das equações diferenciais

Transformada de Laplace

- Linearização

Analogia Elétrica





A.4-1 a A.4-4 Engenharia de Controle Moderno – OGATA 4ª. edição

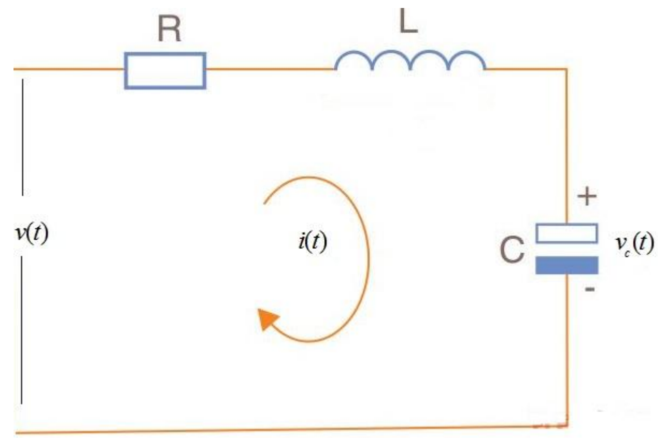
Espaço de estado

Consiste em n equações diferenciais de primeira ordem que são apresentadas utilizando uma notação com matrizes e vetores. **Estado**: o estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis (chamadas de variáveis de estado x1(t), x2(t),...,xn(t)), tais que o conhecimento destas variáveis no instante inicial (t=0), juntamente com o conhecimento do sinal de entrada para t > t0 é suficiente para determinar completamente o comportamento dinâmico do sistemas para t > t0.

- Usa o domínio do tempo;
- Quaisquer condições iniciais;
- Aplicabilidade mais ampla: sistemas lineares e não-lineares;
- sistemas invariantes no tempo e variantes no tempo;
- sistemas SISO (Single Input, Single Output) e MIMO (Multiple Inputs, Multiple Outputs)
- Interpretação física mais abstrata.

Espaço de estado

Suponha que escolhemos i(t) e Vc(t) como as variáveis de estado. Então as equações que descrevem a dinâmica do sistema são:



$$L\frac{di}{dt}+Ri+v_c=v$$

$$c\frac{dv}{dt}=i$$

$$\begin{bmatrix}\dot{i}\\ \dot{v}_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-R/L & -1/L\\ 1/C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\\ v_c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/L\\ 0\end{bmatrix}[v]$$

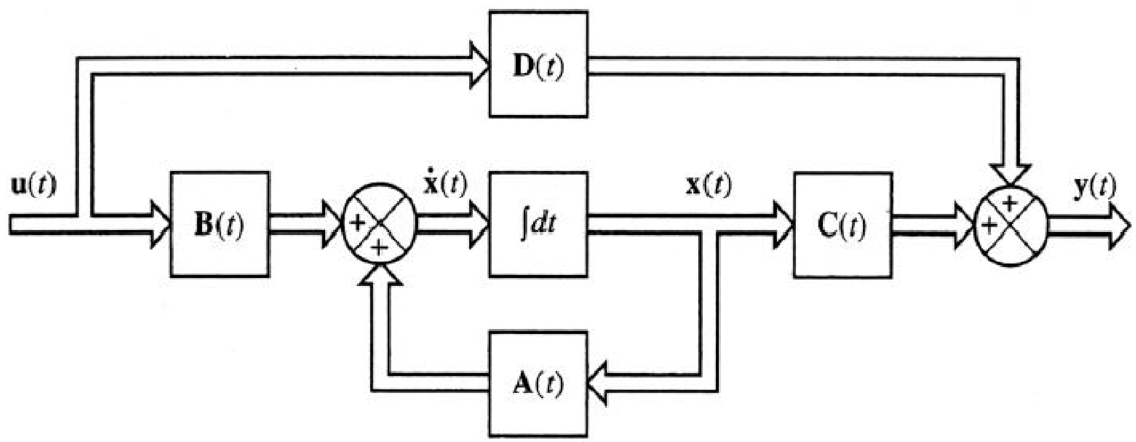
- Existem infinitas representações por variáveis de estado para um determinado sistema dinâmico.

Espaço de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

equação de estado de um sistema linear invariante no tempo



Espaço de estado

<u>Função de Transferência</u>: Relação da Transformada de Laplace de saída com a transformada de laplace da entrada.

Considerando as condições iniciais nulas, x(0) igual a zero.

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s)$$

$$Y(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D\right]U(s)$$

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

função de transferência do sistema em termos de **A**, **B**, **C** e D

Espaço de estado

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

polinômio em s

polinômio característico de $G(s)$

autovalores de $\mathbf{A}$ são idênticos aos pólos de $G(s)$

Os autovalores de uma matriz A são os escalares λ que resolvem a equação

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \mathbf{0}$ ou seja, são as raízes da equação característica

Espaço de estado

- Linearização

$$\Delta \dot{x}_i = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Delta x_j + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \Delta u_k \right]_{(\mathbf{x},\mathbf{u})=(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}})}$$

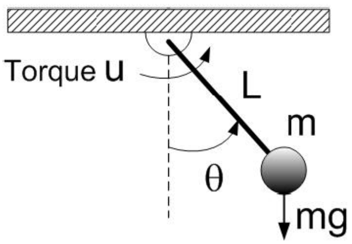
$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}$$

Espaço de estado

- Linearização

Exemplo: Pêndulo simples



$$mL\ddot{\theta} + mg\,\mathrm{sen}\theta = L^{-1}u$$

$$x_1 = \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2$$

$$x_2 = \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\mathrm{sen}\theta + \frac{1}{mL^2}u = -\frac{g}{L}\mathrm{sen}x_1 + \frac{1}{mL^2}u$$

$$f_1(x_1, x_2, u) = x_2$$

$$f_2(x_1, x_2, u) = -\frac{g}{L}\mathrm{sen}x_1 + \frac{1}{mL^2}u$$

$$f_1(x_1, x_2, u) = x_2$$

$$f_2(x_1, x_2, u) = -\frac{g}{L}\mathrm{sen}x_1 + \frac{1}{mL^2}u$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos\bar{x}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix}$$