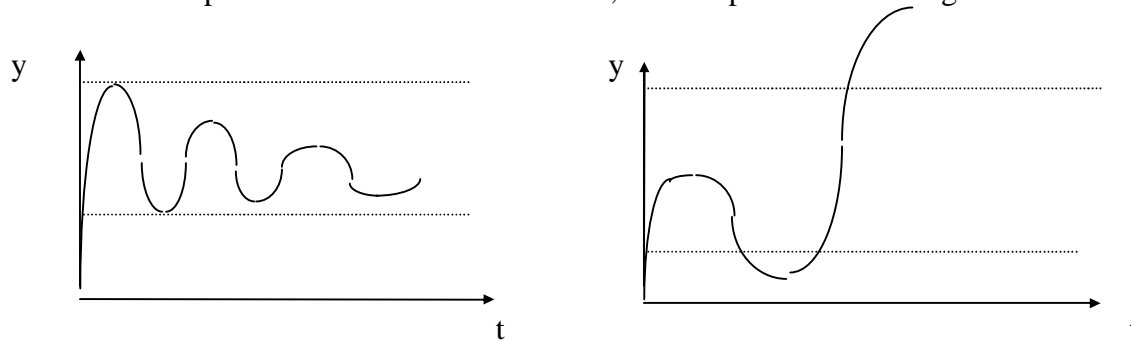


10 - ESTABILIDADE

Como definiremos se um sistema é instável ou estável ? Há diferentes maneiras, dependendo do rigorismo matemático da definição e de sua utilidade prática para aplicações realísticas. Vamos empregar a seguinte definição: um sistema dinâmico é considerado estável se toda entrada , ou excitação, que não seja em forma de rampa produzir uma resposta limitada, indiferente de seu estado inicial. Uma entrada ou saída é limitada se uma ou outra permanecer em um limite superior ou inferior. Graficamente, isto é representado da seguinte maneira.



Como foi citado, anteriormente, a função de transferência de um processo qualquer, seja ele em malha fechada ou aberta, pode corresponder a uma situação de instabilidade ou descontrole. Entretanto, a estabilidade de um sistema pode ser tratado de uma forma unificada independentemente de ser controlado ou não.

A localização dos pólos de uma função de transferência nos dá o primeiro critério para checar a estabilidade do sistema.

“Se a função de transferência de um sistema dinâmico tem pelo menos um pólo com parte real positiva, o sistema é instável.”

Entretanto, todos os pólos de uma função de transferência precisam estar no lado esquerdo de um plano complexo, para o sistema ser estável.

A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

Vamos considerar o sistema generalizado de uma malha em “feedback” já visto. A resposta em “loop” fechado é dado por

$$Y(s) = \frac{G_P \cdot G_F \cdot G_C}{1 + G_P \cdot G_F \cdot G_C \cdot G_M} \cdot Y_{SP}(s) + \frac{G_D}{1 + G_P \cdot G_F \cdot G_C \cdot G_M} \cdot D(s)$$

ou

$$Y(s) = G_{SP} \cdot Y_{SP}(s) + G_{carga}(s) \cdot D(s).$$

A estabilidade característica de um resposta em “feedback”, ou em malha fechada, será determinada pelos pólos das funções de transferência  $G_{SP}$  e  $G_{carga}$ . Estes pólos são comuns em ambas funções de transferência por elas apresentarem o mesmo denominador e são as raízes da equação

$$1 + G_P \cdot G_F \cdot G_C \cdot G_M = 0.$$

Vamos chamar de  $p_1, p_2, \dots, p_N$  as raízes da equação característica.

$$1 + G_P \cdot G_F \cdot G_C \cdot G_M = (s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_N)$$

Então nós podemos afirmar o seguinte critério para a estabilidade de um “loop” fechado: “um sistema de controle em “feedback” é estável se todas as raízes da equação característica tiver parte real negativa, ou seja, se estiverem à esquerda do eixo imaginário”. Se alguma raiz da equação característica estiver sobre ou à direita do eixo imaginário, a malha é instável.

O produto  $G_C \cdot G_F \cdot G_P \cdot G_M$  é chamado de função de transferência em “loop” aberto porque ele relaciona a saída  $y_M$  com o “set point”,  $y_{SP}$ , se o “loop” é partido antes do comparador do controlador e é representado por  $G_{OL}$ . Logo  $y_M = G_{OL} \cdot y_{SP}$  e a equação característica pode ser escrita como  $1 + G_{OL} = 0$ . Verifica-se, assim, que a equação característica só depende da influência dos elementos do “loop” em “feedback”. Ela não depende de funções de transferência externas ( $G_D$ , por exemplo).

### CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE

#### ROUTH-HURWITZ

Vamos expandir a equação característica na seguinte forma polinomial:

$$1 + G_P \cdot G_F \cdot G_C \cdot G_M = 1 + G_{OL} = a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot s + a_n = 0.$$

Vamos ter o cuidado de manter  $a_0$  positivo; caso não o seja, vamos multiplicar o polinômio por (-1).

*1° teste:* Se algum dos coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  é negativo, há no mínimo uma raiz da equação característica com parte real positiva e, assim, o sistema correspondente é instável. Mais nenhuma análise é necessária.

*2° teste:* Se todos os coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  são positivos, então pelo primeiro teste não podemos concluir sobre a localização das raízes. Assim, formaremos a seguinte regra, conhecida pela regra de Routh.

$$\begin{array}{l|cccccccc} \text{linha 1} & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & \dots & 0 \\ \text{linha 2} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & \dots & 0 \\ \text{linha 3} & A_1 & A_2 & A_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \text{linha 4} & B_1 & B_2 & B_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ n + 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{array}$$

onde

$$A_1 = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1} \quad A_2 = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1} \quad A_3 = \frac{a_1 \cdot a_6 - a_0 \cdot a_7}{a_1}$$

$$B_1 = \frac{A_1 \cdot a_3 - a_1 \cdot A_2}{A_1} \quad B_2 = \frac{A_1 \cdot a_5 - a_1 \cdot A_3}{A_1} \quad \dots$$

etc.

Examinado os elementos da primeira coluna

$$a_0, a_1, A_1, B_1, C_1, \dots, W_1$$

i) se algum destes elementos é negativo, o sistema é instável;

ii) o nº de mudanças de sinal nestes elementos é igual ao nº de raízes no lado direito do eixo imaginário.

### LUGAR DAS RAÍZES

A análise di lugar das raízes nada mais é do que a construção dos gráficos, no plano complexo, das raízes da equação característica quando o ganho do controlador ( $K_C$ ) é variado de zero ao infinito. Assim, nós verificamos a característica de estabilidade quando o ganho  $K_C$  muda. Vamos examinar esta análise utilizando um exemplo de duas capacitâncias em série controladas por uma ação proporcional.

$$G_P(s) = \frac{K_P}{(\tau_1 \cdot s + 1) \cdot (\tau_2 \cdot s + 1)}$$

$$G_M(s) = G_F(s) = 1$$

$$G_C(s) = K_C$$

Assim , a equacao caracterisitica fica

$$1 + \frac{K_P}{(\tau_1 \cdot s + 1) \cdot (\tau_2 \cdot s + 1)} \cdot K_C = 0$$

ou

$$(\tau_1 \cdot s + 1) \cdot (\tau_2 \cdot s + 1) + K_P \cdot K_C = 0$$

Considere  $K = K_C \cdot K_P$  como o parâmetro de mudança em vez do ganho  $K_C$  e faça as seguintes observações:

1) quando  $K = 0$ , a equação característica tem como raízes os pólos da função de transferência do processo:

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1} \quad p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$$

2) enquanto K aumenta, as raízes da equação característica são dadas por

$$p_{1,2} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot (1+K)}}{2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2}$$

As raízes são reais, distintas e negativas enquanto

$$(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot (1+K) > 0$$

ou

$$K < \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2} - 1$$

ou

$$K_C < \frac{1}{K_P} \cdot \left[ \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2} - 1 \right]$$

3) quando

$$K_C = \frac{1}{K_P} \cdot \left[ \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2} - 1 \right]$$

nós temos duas raízes reais.

$$p_1 = p_2 = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2}$$

4) Para

$$K_C > \frac{1}{K_P} \cdot \left[ \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2} - 1 \right]$$

nós temos, novamente, duas raízes distintas, que são conjugados complexos.

$$p_{1,2} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot (1+K) - (\tau_1 + \tau_2)^2}}{2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2}$$

Note que a parte real é igual a

$$-\frac{\tau_1 + \tau_2}{2 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2}$$

e independente de K, e a parte imaginária tende ao infinito.

Utilizando as informações acima, nós podemos construir o lugar das raízes para o sistema em questão como se seguirá.

1) O início do lugar das raízes corresponde a  $K_C = 0$  e é dado pelos pontos A(-1/ $\tau_1$ ;0) e B(-1/ $\tau_2$ ;0).

2) Enquanto  $K_C$  satisfaz a desigualdade

$$K_C < \frac{1}{K_P} \cdot \left[ \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2} - 1 \right]$$

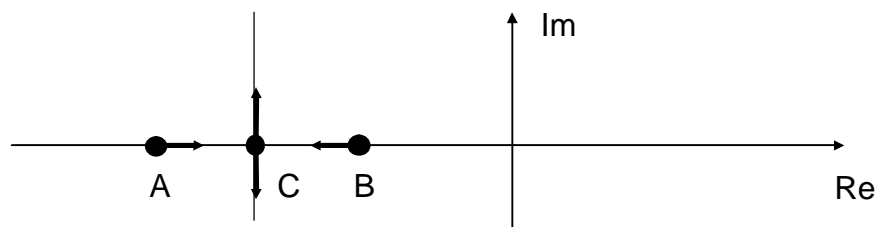
nós temos duas raízes reais, distintas e negativas. Entretanto, o lugar das raízes é dado por duas retas distintas que emanam dos pontos A e B e permanecem sobre o eixo real. Além disto, as duas retas movem-se uma para outra e encontram-se no ponto C. Neste ponto  $K_C$  vale

$$K_C = \frac{1}{K_P} \cdot \left[ \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2} - 1 \right]$$

3) Para valores de  $K_C$  maiores, eles satisfazem a desigualdade

$$K_C > \frac{1}{K_P} \cdot \left[ \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{4 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2} - 1 \right]$$

e nós temos novamente duas curvas (retas) distintas no lugar das raízes, pois temos dois pólos conjugados complexos. Como a parte real das raízes complexas é constante, os dois ramos do lugar das raízes são perpendiculares ao eixo real e vão para o infinito quando  $K_C$  também vai para o infinito. O lugar das raízes completo é mostrado em um gráfico a seguir e todos os seus ramos estão localizados à esquerda do eixo imaginário.

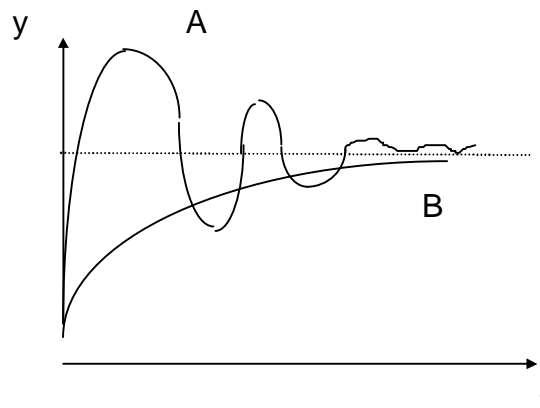


A construção do lugar das raízes para este exemplo foi simples. Para sistemas com ordens mais altas, encontrar a localização exata dos ramos do lugar das raízes, nós necessitaremos de um programa de computador para encontrarmos as raízes do polinômio.

## 11 - CRITÉRIOS PARA PROJETO E SINTONIA DE CONTROLADORES EM “FEEDBACK”

### CRITÉRIO DE SIMPLES PERFORMANCE

Vamos iniciar com o critério de simples performance já que necessitamos estabelecer alguma base para a comparação de alternativas para projeto e sintonia de controladores, e porque sua seleção constitui a principal dificuldade durante o projeto de um sistema em “feedback”.



Consideremos dois diferentes sistemas de controle em “feedback” produzindo as duas respostas em “loop” fechado na figura a seguir. A resposta A alcançou o nível desejado de operação mais rápido do que a resposta B. Se nosso critério fosse “retornar ao nível de operação o mais rápido possível”, claramente, nós deveríamos selecionar o controlador que dá a resposta A. Mas, se o critério fosse “manter o desvio máximo tão pequeno quanto possível” o controlador da resposta B deveria ser o mais indicado. Dilemas deste tipo são freqüentes no projeto de controladores em “feedback”.

Para todas as aplicações em controle de processos, podemos distinguir

-critério de performance em estado-estacionário;

-critério de performance da resposta dinâmica.

O critério de simples performance é baseado nos sinais característicos da resposta da malha fechada do sistema. As mais freqüentes são o “overshoot”, a razão de decaimento, freqüência de oscilação, etc. Todas as características acima deverão ser utilizadas pelo projetista como critérios básicos para selecionar o controlador e os valores de sintonia (parâmetros de sintonia). A mais comum é a razão de decaimento, que normalmente é mantida em 0,25.

### CRITÉRIO DE PERFORMANCE TEMPO-INTEGRAL

Este critério é baseado na resposta integral em “loop” fechado do processo, não levando em consideração apenas uma característica específica da mesma resposta. Os mais freqüentes são:

integral do quadrado do erro (ISE):

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t).dt$$

integral do valor absoluto do erro (IAE):

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)|.dt$$

integral do tempo x modulo do erro (ITAE):

$$ITAE = \int_0^{\infty} t.|e(t)|.dt$$

sendo

$$e(t) = y_{SP}(t) - y_M(t)$$

O problema de projeto do “melhor” controlador pode agora ser formulado.

“Selecionar o tipo de controlador e os valores dos parâmetros de sintonia de modo a minimizar os valores de ISE, IAE e ITAE da resposta do sistema”.

Para saber qual dos três critérios acima deve ser utilizado, a característica do sistema, que nós queremos controlar, definirá. Mas, algumas linhas gerais poderão ser seguidas.

-Se nós quisermos suprimir fortemente grandes valores de  $e(t)$ , ISE é melhor do que o IAE, porque  $e(t)$  está elevado ao quadrado, aumentando o valor da integral.

-Se nós quisermos a supressão de pequenos erros, o IAE será melhor do que o ISE, porque o quadrado de valores menores que 1 deixam o valor da integral cada vez menor.

-Para suprimir erros que persistem por longos períodos de tempo, o ITAE sintonizará o controlador melhor porque a presença de valores altos para  $t$  amplifica o efeito de nivelar pequenos erros no valor da integral.

### SELEÇÃO DO TIPO DE CONTROLADOR

Para balancear a qualidade da resposta desejada contra a dificuldade de sintonia pode-se adotar as seguintes regras para selecionar o controlador mais apropriado.

A) Se possível, usar um controlador proporcional quando:

- pode-se alcançar “offset” aceitáveis com valores moderados de  $K_c$  - o processo tem uma ação integrante (isto é, termo  $1/s$  na sua função de transferência).

B) Usar um PI quando:

- quando um controlador P sozinho não puder fornecer redução do offset. Controladores PI são usados para controle de vazão. Sistemas de medição de vazão tem resposta mais rápida que respostas de controle de outras variáveis e por isto a velocidade de resposta fica satisfatória, mesmo com a inércia causada pelo modo de controle integral.

C) Usar um PID quando:

- o controlador PI elimina o offset mas reduz a velocidade de resposta. O controlador PID, devido sua ação derivativa produz respostas mais rápidas com ganhos mais altos sem oscilações excessivas. Assim, a ação derivativa é recomendada para controle de temperatura e composição onde se tem necessidade de respostas mais rápidas.

### SINTONIA

Após selecionar o tipo de controlador em “feedback”, ainda temos o problema para definir os parâmetros de sintonia. Isto pode ser resolvido de três formas:

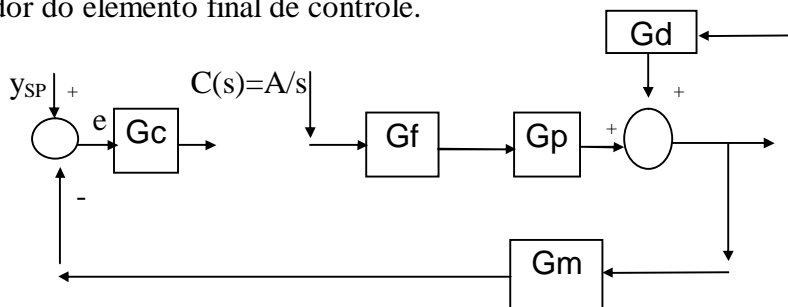
i) critérios de simples performances;

ii) critério tempo-integral;

iii) métodos semi-empíricos, os quais têm se mostrado melhores na prática.

Assim sendo, vamos ver um método de sintonia empírico, conhecido como o “método da curva de reação do processo”, desenvolvido por Cohen e Coon.

Considere o sistema de controle da figura a seguir, que foi aberto, desconectando o controlador do elemento final de controle.



Introduzimos um degrau A na atuação sobre a válvula, sendo c a posição da haste. Registramos o valor da saída com o tempo. A curva  $y_M(t)$  é chamada de curva de reação do processo. Entre  $y_M$  e c nós temos a seguinte função de transferência:

$$G_{PRC} = \frac{Y_M(s)}{C(s)} = G_F(s) \cdot G_P(s) \cdot G_M(s)$$

A última equação mostra que a curva de reação de processo é afetado não somente pela dinâmica do principal processo, mas também pela dinâmica do sensor e do elemento final de controle.

Cohen e Coon observaram que a resposta da maioria das unidades de processo com uma mudança na entrada tem uma forma senoidal que pode ser adequadamente aproximada pela resposta de um sistema de primeira ordem com tempo morto

$$G_{PRC}(s) = \frac{Y_M(s)}{C(s)} \approx \frac{K \cdot e^{-t_d \cdot s}}{\tau \cdot s + 1}$$

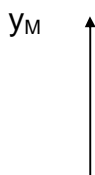
a qual tem três parâmetros: ganho K, tempo morto  $t_d$ , e a constante de tempo  $\tau$ . Da resposta aproximada (que será mostrada a seguir) estimam-se os valores dos três parâmetros. Assim

$$K = \frac{\text{saida (estado - estacionario)}}{\text{entrada (estado - estacionario)}} = \frac{B}{A}$$

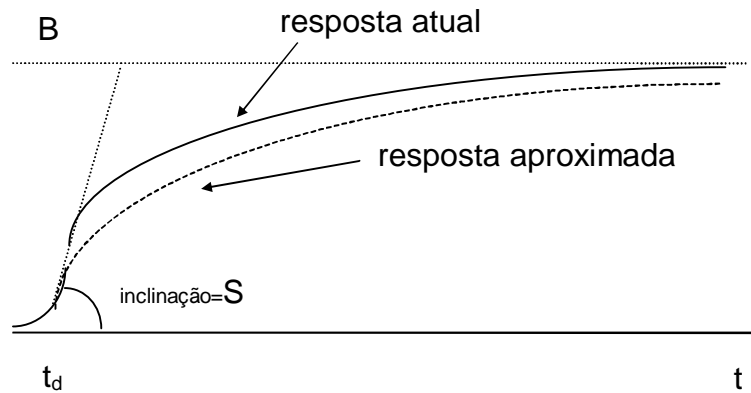
$$\tau = \frac{B}{S}, \text{ onde } S \text{ e a inclinacao da resposta senoidal no ponto de inflexao}$$

$t_d$  = tempo decorrido ate o sistema responder.

Cohen e Coon usaram o modelo aproximado e estimaram os parâmetros citados.







Então eles derivaram expressões para o “melhor” sintonia do controlador utilizando alterações na carga e vários critérios de performance, como

- razão de decaimento de 1/4;
- ”offset” mínimo;
- mínimo ISE.

Os resultados desta análise são sumarizados abaixo.

Para controlador proporcional:

$$K_C = \frac{1}{K} \cdot \frac{\tau}{t_d} \cdot \left( 1 + \frac{t_d}{3 \cdot \tau} \right)$$

Para controlador PI:

$$K_C = \frac{1}{K} \cdot \frac{\tau}{t_d} \cdot \left( 0,9 + \frac{t_d}{12 \cdot \tau} \right)$$

$$\tau_I = t_d \cdot \frac{30 + \frac{3 \cdot t_d}{\tau}}{9 + \frac{20 \cdot t_d}{\tau}}$$

Para controlador PID:

$$K_C = \frac{1}{K} \cdot \frac{\tau}{t_d} \cdot \left( \frac{4}{3} + \frac{t_d}{4 \cdot \tau} \right)$$

$$\tau_I = t_d \cdot \frac{32 + \frac{6 \cdot t_d}{\tau}}{13 + \frac{8 \cdot t_d}{\tau}}$$

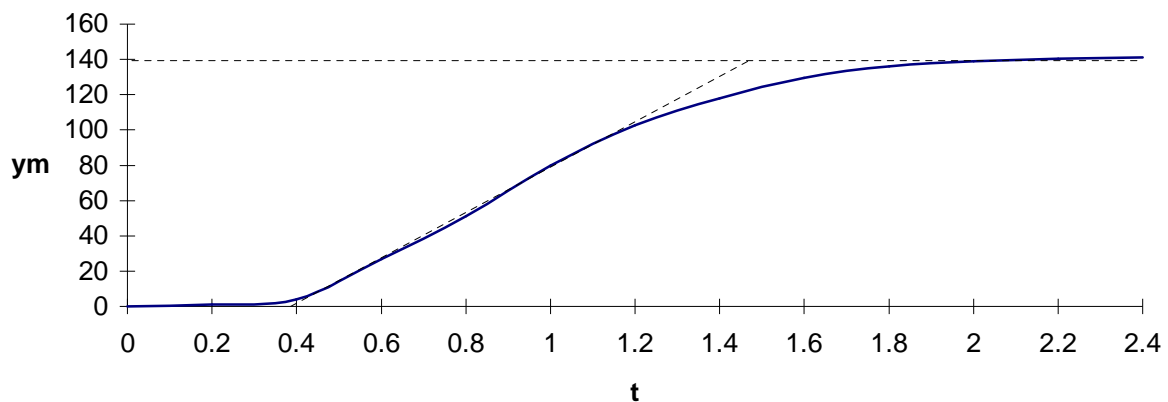
$$\tau_D = t_d \cdot \frac{4}{11 + \frac{2 \cdot t_d}{\tau}}$$

EXEMPLO. A tabela a seguir mostra curva de reação de processo experimental de um sistema de “loop” aberto com um controlador PI. Usando estes valores:

- i) aproxime a resposta de “loop” aberto pelo sistema de primeira ordem com tempo morto;
- ii) selecione os parâmetros para o controlador pela técnica Cohen-Coon.

t(min)	-2	-1	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
c(t)	100	100	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150
y <sub>M(t)</sub>	200	200	200,1	201,1	204,0	227,0	251,0	280,0	302,5	318,0	329,5	336,0	339,0	340,5	341,0

**CURVA DE REAÇÃO DE PROCESSO**



**RESULTADOS**

B = 141,5

A = 50,0

K = 2,83

t<sub>d</sub> = 0,4

S = 141,5

τ = 1,0

$$K_c = \frac{1}{2,83} \cdot \frac{1}{0,4} \cdot \left( 0,9 + \frac{0,4}{12,1,0} \right) = 0,8245$$

$$\tau_i = 0,4 \cdot \frac{30 + \frac{3,0,4}{1,0}}{9 + \frac{20,0,4}{1,0}} = 0,734\text{min}$$

Neste exemplo verificamos que a aproximação da curva de reação de processo por um sistema de primeira ordem com tempo morto se adequou muito bem ao problema.

## 12 - ANÁLISE DA RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A partir daqui, vamos estudar uma nova técnica que é freqüentemente utilizada para projetar controladores em “feedback”. Totalmente diferente do que foi visto até aqui, ela se chama “análise da resposta em freqüência”.

Vamos começar por um sistema de primeira ordem.

A função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{K_p}{\tau_p \cdot s + 1} = \frac{Y(s)}{F(s)}$$

e vamos submetê-la a uma entrada senoidal com amplitude A e freqüência  $\omega$

$$f(t) = A \cdot \text{sen } \omega t$$

então

$$F(s) = \frac{A \cdot \omega}{s^2 + \omega^2}$$

Assim, Y(s) ficará o seguinte.

$$Y(s) = \frac{K_p}{\tau_p \cdot s + 1} \cdot \frac{A \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{C_1}{s + \frac{1}{\tau_p}} + \frac{C_2}{s + j \cdot \omega} + \frac{C_3}{s - j \cdot \omega}$$

e

$$y(t) = \frac{K_p \cdot A \cdot \omega \cdot \tau_p}{\tau_p^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_p}} - \frac{K_p \cdot A \cdot \omega \cdot \tau_p}{\tau_p^2 \cdot \omega^2 + 1} \cos \omega t + \frac{K_p \cdot A}{\tau_p^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot \text{sen } \omega t$$

$$(t \rightarrow \infty) \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau_p}} \rightarrow 0$$

$$y_{EE}(t) = -\frac{K_p \cdot A \cdot \omega \cdot \tau_p}{\tau_p^2 \cdot \omega^2 + 1} \cos \omega t + \frac{K_p \cdot A}{\tau_p^2 \cdot \omega^2 + 1} \cdot \text{sen } \omega t = \frac{K_p \cdot A}{\sqrt{\tau_p^2 \cdot \omega^2 + 1}} \text{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

$$\phi = \arctan(-\omega \cdot \tau_p)$$

Observações.

-O último valor da resposta em estado-estacionário, para uma entrada senoidal, de um sistema de primeira ordem é também uma onda senoidal com a mesma freqüência  $\omega$ .

-A relação da amplitude de saída com a amplitude da entrada é chamada de “razão de amplitude” e é uma função da freqüência:

$$AR = \frac{K_p}{\sqrt{\tau_p^2 \cdot \omega^2 + 1}}$$

-A onda de saída é atrasada com relação à onda de entrada por um ângulo  $\phi$  que também é uma função da frequência  $\omega$ .

As três observações acima são extensivas a qualquer sistema linear de qualquer ordem. Na tabela, a seguir são apresentadas as respostas em frequência para vários sistemas lineares.

TABELA 4. Resposta em frequência de sistemas lineares.

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	RAZÃO DE AMPLITUDE (RA)	ÂNGULO DE FASE ( $\phi$ )
$\frac{K_P}{s}$	$\frac{K_P}{\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{K_1}{\tau_1 s + 1} \cdot \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} \cdots \frac{K_N}{\tau_N s + 1}$	$\frac{K_1 \cdots K_N}{\sqrt{1 + \tau_1^2 \cdot \omega^2} \cdots \sqrt{1 + \tau_N^2 \cdot \omega^2}}$	$\tan^{-1}(-\tau_1 \cdot \omega) + \cdots + \tan^{-1}(-\tau_N \cdot \omega)$
$\frac{K_P}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot s + 1}$	$\frac{K_P}{\sqrt{(1 - \tau^2 \cdot \omega^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot \omega)^2}}$	$\tan^{-1}\left(-\frac{2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot \omega}{1 - \tau^2 \cdot \omega^2}\right)$
$e^{t_d \cdot s}$	1	$t_d \cdot \omega$
funções de transferência de controladores		
$K_C$	$K_C$	0
$K_C \left(1 + \frac{1}{\tau_i \cdot s}\right)$	$K_C \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega \tau_i)^2}}$	$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\omega \cdot \tau_i}\right)$
$K_C \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_i \cdot s} + \tau_D \cdot s\right)$	$K_C \cdot \sqrt{\left(\tau_D \cdot \omega - \frac{1}{\tau_i \cdot \omega}\right)^2 + 1}$	$\tan^{-1}\left(\tau_D \cdot \omega - \frac{1}{\tau_i \cdot \omega}\right)$

DIAGRAMAS DE BODE

Os diagramas de Bode constituem um conveniente modo para representar as características da resposta em frequência de um sistema. Os diagramas de Bode constituem-se de um par de gráficos mostrando como o logaritmo decimal da razão de amplitude varia com o logaritmo decimal da frequência e como a fase varia com o logaritmo decimal da frequência.

Exemplo: SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM

razão de amplitude

