Critérios para resposta transitória de Sistemas de segunda ordem

Demonstração (Dedução) do Desempenho do Protótipo de Segunda Ordem (Sistema Sub-Amortecido)

O subamortecido

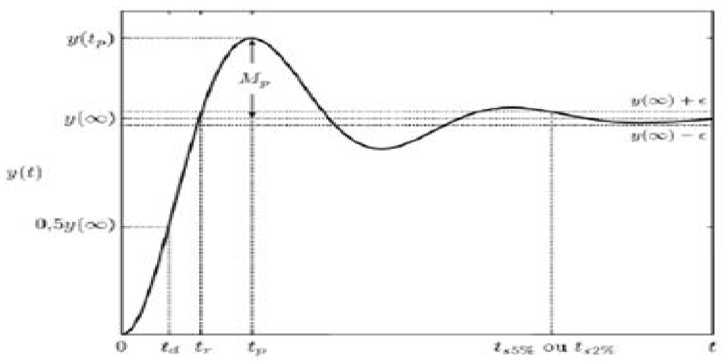


Figura 3.20 Parâmetros para medidas de desempenho de sistemas subamortecidos.

- 1) Tempo de pico, *tp*
- 2) Sobressinal máximo, *Mp*
- 3) Tempo de acomodação, *ts*
- 4) Tempo de atraso, *td*
- 5)Tempo de subida, *tr*

1) Tempo de Pico - t_p :

$$t_p = \frac{\P}{\omega_d}$$

$$t_p = \frac{\P}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

2) Sobressinal Máximo - Máximo Pico : MP

$$MP = Y - 1 = e^{-(\xi / \sqrt{(1-\xi^2)}\ ) * \P}$$

Máximo Pico Percentual MP%

$$MP = 100^* \ e^{-(\xi / \sqrt{(1-\xi^2)}\ ) * \P}$$

3) Tempo de acomodação: Tempo de estabelecimento: t_s

Constante de tempo da envoltória de decaimento:

$$T = \frac{1}{\xi * \omega_n}$$

$$t_s = 4^*T = \frac{4}{\xi * \omega_n} = \frac{4}{\sigma} \quad \text{Critério de 2\%}$$

$$t_s = 3^*T = \frac{3}{\xi * \omega_n} = \frac{3}{\sigma} \quad \text{Critério de 5\%}$$

4) Tempo de Atraso : Td

Aproximação da curva por equação de reta:

$$td = \frac{1 + 0{,}7^*\xi}{\omega_n}$$

Aproximação da curva por equação de grau dois:

$$td = \frac{1.1 + 0{,}125^*\xi + 0{,}469^*\xi^2}{\omega_n}$$

5) Tempo de Subida : Tr

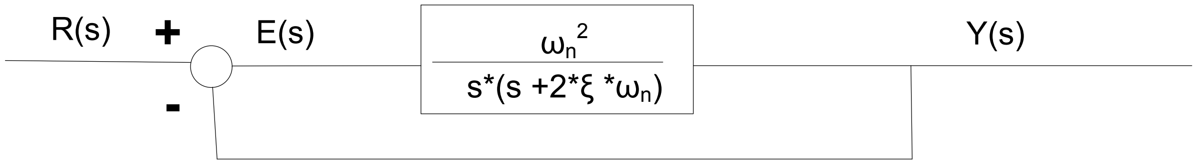
Aproximação da curva por equação de reta:

$$tr = \frac{0{,}8 + 2{,}5^*\xi}{\omega_n}$$

Aproximação da curva por equação de grau dois:

$$tr = \frac{1 - 0{,}4167^*\xi + 2{,}917^*\xi^2}{\omega_n}$$

Demonstração (Dedução) do Desempenho do Protótipo de Segunda Ordem (Sistema Sub-Amortecido)



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2*\xi*\omega_n s + \omega_n^2}$$

Função de Transferência em Malha Fechada

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi*\omega_n + j\omega_d)*(s + \xi*\omega_n - j\omega_d)}$$

Raízes complexas e Conjugadas

$$\omega_d = \omega_n * \sqrt{(1 - \xi^2)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + a + jb)*(s + a - jb)}$$

Raízes complexas e Conjugadas

$R(s) = \frac{1}{s}$ Entrada Degrau

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + a + jb)*(s + a - jb)*s}$$

$$Y(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

$$Y(s) = \frac{A_1*s + A_2}{(s + a + jb)(s + a + jb)} + \frac{A_3}{s}$$

Expansão em frações parciais

Encontrando A_1 , A_2 e A_3

$$A_1*s + A_2 \Big|_{s=-a-jb} = \frac{A(s)}{B(s)} * (s + a + jb)(s + a + jb) \Big|_{s=-a-jb}$$

$$A_3 \Big|_{s=0} = \frac{A(s)}{B(s)} * (s + a + jb)(s + a + jb) \Big|_{s=0}$$

$$A_1*s + A_2 \Big|_{s=-a-jb} = \frac{\omega_n^2}{\cancel{(s + a + jb)}*\cancel{(s + a - jb)}*s} * \cancel{(s + a + jb)}*\cancel{(s + a + jb)} \Big|_{s=-a-jb}$$

$$A_1*s + A_2 \Big|_{s=-a-jb} = \frac{\omega_n^2}{s} \Big|_{s=-a-jb} = \frac{\omega_n^2}{-a-jb} = \frac{\omega_n^2}{-a-jb} * \frac{-a+jb}{-a+jb}$$

$$A_1*(-a-jb) + A_2 = \frac{\omega_n^2*(-a+jb)}{a^2+b^2}$$

$$A_1*-a - A_1*jb + A_2 = \omega_n^2*-a + \omega_n^2*jb)$$

$$A_1*-a + A_2 = -a$$

$$-A_1*jb = jb$$

$$\boxed{A_1 = -1}$$

$$A_1*-a + A_2 = \omega_n^2*-a$$

$$\omega_n^2*a + A_2 = \omega_n^2*-a$$

$$\boxed{A_2 = -2*a}$$

$$A_3 = \frac{A(s)}{B(s)} * (s) \Big|_{s=0}$$

$$A_3 = \frac{\omega_n^2 \quad * \quad \cancel{* (s)}}{(s^2 + 2*\xi*\omega_n s + \omega_n^2) \cancel{* s}} \Big|_{s=0} \qquad \boxed{A_3 = 1}$$

$\boxed{A_1 = -1}$ $\boxed{A_2 = -2*a}$ $\boxed{A_3 = 1}$

$\boxed{A_1 = -1}$ $\boxed{A_2 = -2*\xi*\omega_n}$ $\boxed{A_3 = 1}$

$$Y(s) = \frac{-1*s \quad - 2*\xi*\omega_n}{(s + -2*\xi*\omega_n + j\omega_d) * (s + -2*\xi*\omega_n - j\omega_d)} + \frac{1}{s}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + a + jb) * (s + a - jb)}$$

$A = -2*\xi*\omega_n$
$b = \omega_d$
$\omega_d = \omega_n * \sqrt{(1-\xi^2)}$

$$Y(s) = \frac{-1*s \qquad - 2*\xi*\omega_n}{(s + 1*\xi*\omega_n + j\omega_d) \quad (s + 1*\xi*\omega_n - j\omega_d)} + \frac{1}{s}$$

Exemplo:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{16}{s^2 + 4*s + 16}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2*\xi*\omega_n*s + \omega_n^2}$$

$$Y(s) = \frac{-1*s \qquad - 2*\xi*\omega_n}{(s + 1*\xi*\omega_n + j\omega_d)(s + 1*\xi*\omega_n - j\omega_d)} + \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{-1*s \qquad - 4}{(s + 2 + j3,46) * (s + 2 - j3,46)} + \frac{1}{s}$$

$\omega_n = 4$ $\quad \xi = 0,5$ $\quad \omega_d = 3,46$

$2*\xi*\omega_n = 4$ $\quad \xi*\omega_n = 2$

$$Y(t) = 1 - e^{-\xi*\omega n*t} \left(\cos(\omega_d*t) + \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \sin(\omega_d*t) \right)$$

$$Y(t) = 1 - e^{-2*t} \left(\cos(3,46*t) + 0,577 * \sin(3,46*t) \right)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + a + jb) * (s + a - jb)}$$

$$A = -2*\xi*\omega_n$$
$$b = \omega_d$$
$$\omega_d = \omega_n * \sqrt{(1-\xi^2)}$$

$$Y(s) = \frac{-1*s \qquad - 2*\xi*\omega_n}{(s + 1*\xi*\omega_n + j\omega_d) * (s + 1*\xi*\omega_n - j\omega_d)} + \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{-1*s \qquad - 2*\xi*\omega_n}{(s^2 + 2*\xi*\omega_n*s + \omega_n^2)} + \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{-1*s \qquad - 2*\xi*\omega_n}{(s + \xi*\omega_n^2) + \omega_d^2)} + \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = - \frac{s + \xi*\omega_n}{(s + \xi*\omega_n^2) + \omega_d^2)} - \frac{\xi*\omega_n}{(s + \xi*\omega_n^2) + \omega_d^2)} + \frac{1}{s}$$

(1) (2)

$$\pounds^{-1} \left\{ \frac{s + \xi*\omega_n}{(s + \xi*\omega_n)^2 + \omega_d^2)} \right\} = e^{-\xi*\omega n)} * \cos(\omega_d*t) \qquad (A)$$

$$\pounds^{-1} \left\{ \frac{\omega_d}{(s + \xi*\omega_n)^2 + \omega_d^2)} \right\} = e^{-\xi*\omega n)} * \sin(\omega_d*t) \qquad (B)$$

$$\frac{\xi*\omega_n}{(s + \xi*\omega_n^2) + \omega_d^2)}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{(1-\xi^2)}}$$

$$\omega_d = \omega_n * \sqrt{(1-\xi^2)}$$

(2) (2)

$$\pounds^{-1} \left\{ \frac{s + \xi*\omega_n}{(s + \xi*\omega_n)^2 + \omega_d^2)} \right\} = e^{-\xi*\omega n*t} * \cos(\omega_d*t)$$

$$\pounds^{-1} \left\{ \frac{\xi \quad * \quad \omega_d}{\sqrt{(1-\xi^2)} \; (s + \xi*\omega_n)^2 + \omega_d^2)} \right\} = \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \; e^{-\xi*\omega n*t} * \sin(\omega_d*t)$$

$$\pounds^{-1} \left\{ + \frac{1}{s} \right\} = 1$$

$$Y(t) = 1 - e^{-\xi*\omega n*t} \left(\cos(\omega_d*t) + \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \sin(\omega_d*t) \right)$$

$$Y(t) = 1 - e^{-\xi * \omega n * t} \left(\cos(\omega_d * t) + \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \sin(\omega_d * t) \right)$$

$$Y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi * \omega n * t}}{\sqrt{(1-\xi^2)}} * \sin\left(\omega_d * t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{(1-\xi^2)}}{\xi} \right)$$

$$Y(t) = 1 - e^{-\xi * \omega n * t} \left(\cos(\omega_d * t) + \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \sin(\omega_d * t) \right)$$

$$Y(t) = 1 - e^{-\xi * \omega n * t} * \cos(\omega_d * t) + e^{-\xi * \omega n * t} * \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \sin(\omega_d * t)$$

A) $e^{-\xi * \omega n * t} * \cos(\omega_d * t)$

Regra da Cadeia:

D f(X) * D g(X) = f'(x) * g(x) + g'(x)* f(x)

$f(X) = e^{-\xi * \omega n * t}$ $\quad$ $f'(X) = -\xi * \omega_n * e^{-\xi * \omega n * t}$

$g(x) = \cos(\omega_d * t)$ $\quad$ $g'(x) = -\operatorname{sen}(\omega_d * t)$

A) $$\frac{d\,Y(t)}{d\,t} = -\xi * \omega_n * e^{-\xi * \omega n * t} * \cos(\omega_d * t) - \operatorname{sen}(\omega_d * t) * e^{-\xi * \omega n * t}$$

B) $e^{-\xi * \omega n * t} * \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \sin(\omega_d * t)$

Regra da Cadeia:

D f(X) * D g(X) = f'(x) * g(x) + g'(x)* f(x)

$f(X) = e^{-\xi * \omega n * t}$ $\quad$ $f'(X) = -\xi * \omega_n * e^{-\xi * \omega n * t}$

$g(x) = \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \sin(\omega_d * t)$ $\quad$ $g'(x) = \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} * \cos(\omega_d * t)$

B) $$\frac{d\,Y(t)}{d\,t} = -\xi * \omega_n * e^{-\xi * \omega n * t} * \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} * \sin(\omega_d * t) + \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} * \cos(\omega_d * t) * e^{-\xi * \omega n * t}$$

A) $$\frac{d\,Y(t)}{d\,t} = -\xi * \omega_n * e^{-\xi * \omega n * t} * \cos(\omega_d * t) - \operatorname{sen}(\omega_d * t) * e^{-\xi * \omega n * t}$$

B) $$\frac{d\,Y(t)}{d\,t} = -\xi * \omega_n * e^{-\xi * \omega n * t} * \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} * \sin(\omega_d * t) + \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} * \cos(\omega_d * t) * e^{-\xi * \omega n * t}$$

$$\frac{d\,Y(t)}{d\,t} = \underset{1}{-\xi \cdot \omega_n \cdot e^{-\xi \cdot \omega n \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)} - \underset{2}{\mathrm{sen}(\omega_d \cdot t) \cdot e^{-\xi \cdot \omega n \cdot t}}$$
$$\underset{3}{-\xi \cdot \omega_n \cdot e^{-\xi \cdot \omega n \cdot t} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \cdot \mathrm{sen}(\omega_d \cdot t)} + \underset{4}{\frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \cdot \cos(\omega_d \cdot t) \cdot e^{-\xi \cdot \omega n \cdot t}}$$

Agrupando os termos 1 e 4 Se anulam, uma vez que

$$\frac{d\,Y(t)}{d\,t} = -\left(\xi \cdot \omega_n \cdot e^{-\xi \cdot \omega n \cdot t} \cdot \left(\cos(\omega_d \cdot t) + \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \cdot e^{-\xi \cdot \omega n \cdot t} \cos(\omega d \cdot t)\right)\right)$$

$$\frac{d\,Y(t)}{d\,t} = \sin(\omega_d \cdot t) \cdot \frac{\omega_n}{\sqrt{(1-\xi^2)}}\, e^{-\xi \cdot \omega n \cdot t} = 0$$

$$\left.\frac{d\,Y(t)}{d\,t}\right|_{t=t_p} = \sin(\omega_d \cdot t_p) \cdot \frac{\omega_n}{\sqrt{(1-\xi^2)}}\, e^{-\xi \cdot \omega n \cdot tp} = 0$$

$$\left.\frac{d\,Y(t)}{d\,t}\right|_{t=t_p} = \sin(\omega_d \cdot t_p) = 0 \qquad \omega_d \cdot t_p = 0, \P, 2 \cdot \P, 3 \cdot \P$$

Ocorrência do primeiro pico: $t_p = \dfrac{\P}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ $\qquad \omega_d \cdot t_p = \P$

Valor do Máximo Overshoot: MP

MP = Y(t) – 1 para t = tp

$$Y(t) = 1 - e^{-\xi \cdot \omega n \cdot t}\left(\cos(\omega_d \cdot t) + \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \sin(\omega_d \cdot t)\right)$$

$$MP = -e^{-\xi \cdot \omega n \cdot tp}\left(\cos(\P) + \frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \sin(\P)\right)$$

$$MP = e^{-(\sigma / \omega d) \cdot \P} \qquad \sigma = \xi \cdot \omega_n$$

$$MP = e^{-(\xi / \sqrt{(1-\xi^2)}) \cdot \P} \qquad \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{(1-\xi^2)}}$$

Tempo de Estabelecimento: Ts

$$Y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi * \omega n * t}}{\sqrt{(1-\xi^2)}} * \sin\left(\omega_d * t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{(1-\xi^2)}}{\xi}\right)$$

Curva de Resposta , composta por envoltória como curva de decaimento:

$$\frac{e^{-\xi * \omega n * t}}{\sqrt{(1-\xi^2)}}$$

Constante de tempo da envoltória de decaimento:

$$T = \frac{1}{\xi * \omega_n}$$

$$t_s = 4*T = \frac{4}{\xi * \omega_n} = \frac{4}{\sigma} \quad \text{Critério de 2\%}$$

$$t_s = 3*T = \frac{3}{\xi * \omega_n} = \frac{3}{\sigma} \quad \text{Critério de 5\%}$$

Tempo de Atraso : Td

Plotando as curvas de ω_n * td versus ξ

Aproximação da curva por equação de reta: $$td = \frac{1 + 0,7*\xi}{\omega_n}$$

Aproximação da curva por equação de grau dois: $$td = \frac{1.1 + 0,125*\xi + 0,469*\xi^2}{\omega_n}$$

Tempo de Subida : Tr

Plotando as curvas de ω_n * tr versus ξ

Aproximação da curva por equação de reta: $$tr = \frac{0,8 + 2,5*\xi}{\omega_n}$$

Aproximação da curva por equação de grau dois: $$tr = \frac{1 - 0,4167*\xi + 2,917*\xi^2}{\omega_n}$$