22

Em aplicações de engenharia, os modelos lineares são largamente utilizados para representar sistemas dinâmicos. Um sistema é dito linear quando atende a propriedade da superposição.

Considere um sistema dinâmico linear cujo comportamento possa ser modelado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + u$$

onde $u(t)$ representa a entrada, $y(t)$, a saída e o parâmetro t foi omitido na equação por simplicidade de notação.

Qual é a resposta em regime permanente desse sistema para a entrada $u(t) = 1 + \cos(2t)$?

(A) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$

(B) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2t)$

(C) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(2t - \frac{\pi}{4})$

(D) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(2t + \frac{\pi}{4})$

(E) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \text{sen}(2t)$

Questão 22 – Enade 2005 -

Dominio do tempo		Dominio de Laplace
$\frac{d^2 y(t)}{dt}$	$\Rightarrow$	$s^2\, y(s)$
$3\,\frac{d\ y(t)}{dt}$	$\Rightarrow$	$3 * s * y(s)$
$2 * y(t)$	$\Rightarrow$	$2 * y(s)$

Dominio do tempo		Dominio de Laplace
$U(t) = 1 + \cos(2*t)$		
1	$\Rightarrow$	$\frac{1}{s}$
$\cos(2t)$	$\Rightarrow$	$\frac{S}{S^2+4}$

$$\boxed{U'(t) = 0 + -2 * \text{sen}(2*t)}$$

$$-2 * \text{sen}(2t) \Rightarrow -2 * \frac{2}{S^2+4}$$

Analise somente para a entrada, excluindo 1.

$$\boxed{u(t) + \frac{du(t)}{dt} = \cos(2t) - 2 * \text{sen}(2t)}$$

$$\boxed{\frac{d^2 y(t)}{dt} + 3\,\frac{d\ y(t)}{dt} + 2\,y(t) = \frac{d\ u(t)}{dt} + u(t)}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt} + 3\,\frac{d\ y(t)}{dt} + 2\,y(t) = \frac{S}{S^2+4}U(s) + \frac{-4}{S^2+4}U(s)$$

$$\boxed{s^2 y(s) + 3 * s\,y(s) + 2\,y(s) = \frac{(s-4)}{S^2+4}U(s)}$$

$$\boxed{\frac{y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(S^2+4)\,(s + 3*s + 2)}}$$

$$\boxed{\frac{y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(S^2+4)\,(s+1)*(s+2)}}$$

Forma de Realizar a Decomposição: $\frac{A}{S+1} + \frac{B}{S+2} + \frac{Cs}{S^2+4} + \frac{D}{S^2+4}$

A $\left[(s+2)*(s^2+4)\right] = A*(s^3 + 2s^2 + 4s + 8)$ $A + B + C = 0$ (1)

B $\left[(s+1)*(s^2+4)\right] = B*(s^3 + s^2 + 4s + 4)$ $2A + B + 3C + D = 0$ (2)

C $\left[s(s+1)*(s+2)\right] = C*(s^3 + 3s^2 + 2s)$ $4A + 4B + 2C + 3D = 1$ (3)

D $\left[(s+1)*(s+2)\right] = D*(s^2 + 3s + 2)$ $8A + 4B + 2D = -4$ (4)

$A = -B - C$ (1)

$2A + B + 3C + D = 0$ (2)

$-2B - 2C + B + 3C + D = 0$

$-B + C + D = 0$

$B = C + D$ (5)

$4A + 4B + 2C + 3D = 1$ (3)

$-4B - 4C + 4B + 2C + 3D = 1$

$-2C + 3D = 1$ (6)

$8A + 4B + 2D = -4$ (4)

$-8B - 8C + 4C + 4D + 2D = -4$

$-8C - 8D - 8C + 4C + 4D + 2D = -4$

$-12C - 2D = -4$ (7)

$-2C + 3D = 1$ (6)

$-12C - 2D = -4$ (7)

$$\boxed{\begin{array}{l} C = 1/4 \\ D = 1/2 \end{array}}$$

Análise somente para a entrada u (t) = 1

$$\frac{d^2 y(t)}{dt} + 3 \frac{d\ y(t)}{dt} + 2\,y(t) = 1$$

$$s^2 y(s) + 3 * s\,y(s) + 2\,y(s) = \frac{1}{s} U(s)$$

$$y(s)\ (s^2 + 3 * s + 2) = \frac{1}{s} U(s)$$

$$\frac{y(s)}{U(s)} = \frac{1}{S\ (s^2 + 3 * s + 2)}$$

Teorema do Valor final:

$$Vf = \lim_{s \to 0} s * Y(s) = \cancel{s} \frac{1}{\cancel{S}\ (s^2 + 3 * s + 2)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Valor em regime devido a entrada u(t) = 1

Analise somente para a entrada $u + \frac{du(t)}{dt} = \cos(2t) - 2 * \text{sen}(2t)$

$$\frac{A}{S+1} + \frac{B}{S+2} + \frac{Cs}{S^2+4} + \frac{D}{S^2+4}$$

As constantes A e B não importam pois, os valores em regime destas funções vão tender a zero, usando o teorema do valor final.

$$\frac{1}{4} * \frac{s}{S^2+4} \Rightarrow \frac{1}{4} * \cos(2t)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C = 1\ /\ 4 \\ D = 1\ /\ 2 \end{array}}$$

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{S^2+4} \Rightarrow$$

Para que a transformação se processe para sen(2t) É preciso aparecer um " 2 " no numerador. Artificio : " multiplicar e dividir o resultado por " 2 "

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{S^2+4} * \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} * \frac{2}{S^2+4} \Rightarrow \frac{1}{4} * \text{sen}(2t)$$

Resposta final: $\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} * \cos(2t) + \frac{1}{4} * \text{sen}(2t)}$

Para encontrar a resposta final É preciso saber que:

cos (a – b) = cos a * cos b + sen a * sen b (1)
cos (a + b) = cos a * cos b + sen a * sen b (2)

$$\text{sen} \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} * \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos 2t * \cos \frac{\pi}{4} + \text{sen}\ 2t * \text{sen} \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\cancel{2\sqrt{2}}} \left(\cos 2t * \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} + \text{sen}\ 2t * \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{4} + \frac{\text{sen}(2t)}{4}}$$

Questão 22 – Enade 2005 - Resposta Certa: Letra C