5 – Transformadas de Laplace

Transformadas de Laplace

5.1 – **Introdução às Transformadas de Laplace**

Neste capítulo estudaremos as Transformadas de Laplace. Elas apresentam uma representação de sinais no domínio da frequência em função de uma variável “s” que é um complexo, $s = \sigma + j\omega$.

A Transformada de Laplace foi desenvolvida pelo matemático francês *Pierre Simon **Laplace*** (1749-1827).

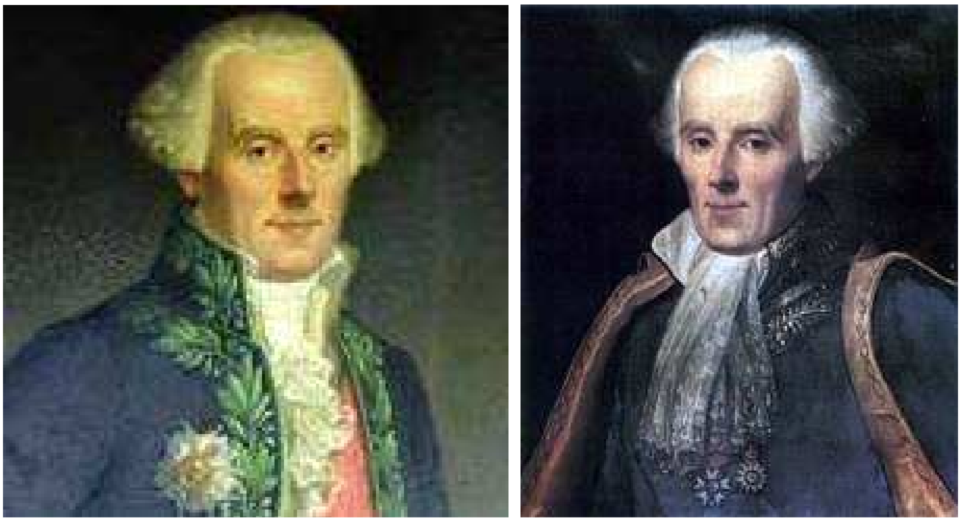


Fig. 5.1 – *Pierre Simon **Laplace*** (1749-1827), francês.

5.2 – **Transformadas de Laplace – definição**

Considere um sinal contínuo x(t)

$$x(t) \in \mathbb{C} \text{ \{conjunto dos números complexos\}}$$

ou seja, o sinal x(t) pode ter valores complexos, i.e., valores com *parte real* e com *parte imaginária*.

A Transformada de Laplace deste sinal x(t), normalmente simbolizada por:

$$\mathscr{L}\{\, x(t) \,\} \qquad \text{ou} \qquad X(s)$$

permite expressar o sinal x(t) como:

$$\mathscr{L}[x(t)] = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot x(t)\, dt \qquad \text{eq. (5.1)}$$

A eq. (5.1) acima é chamada de transformada unilateral pois é definida para sinais x(t) onde

$$x(t) = 0 \qquad \text{para} \quad t < 0$$

e é a definição de Transformada de Laplace adoptada aqui pois é esta a que tem maior aplicação para sistemas dinâmicos.

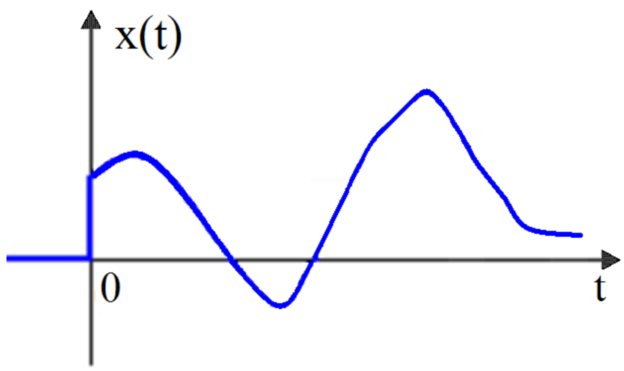


Fig. 5.2 – Um sinal x(t) com valor nulo para t < 0 [i.e., x(t) = 0 para t < 0].

Além desta definição de Transformada de Laplace unilateral (para t ≥ 0) que adoptamos aqui, há também a Transformada de Laplace bilateral (definida para ∀t, ou seja: t < 0 e t ≥ 0).

5.3 – **Transformadas de Laplace de alguns sinais conhecidos**

- Sinal exponencial

Como primeiro exemplo vamos utilizar o sinal exponencial

$$x(t) = e^{-at} \cdot u_1(t) \qquad \text{eq. (5.2)}$$

Para um dado valor de a este sinal $x(t)$ da eq. (5.2) está bem definido e assume o valor 0 ("*zero*") à esquerda da origem pois está multiplicado pelo degrau unitário $u_1(t)$. Entretanto muitas vezes apenas escrevemos $x(t) = e^{-at}, t > 0$ e já fica subentendido que é nulo para t < 0.

O sinal x(t) dado pela eq. (5.2) assume diferentes formas dependendo do valor de a. Se a > 0, x(t) é um sinal exponencial *decrescente*; se a < 0, x(t) é um sinal exponencial *crescente*; se a = 0; x(t) é um sinal degrau unitário.

Os gráficos destes sinais podem ser vistos nas figuras 5.3 e 5.4.

$x(t) = e^{-at} \cdot u_1(t),\ a > 0$ $\qquad$ $x(t) = e^{-at} \cdot u_1(t),\ a < 0$

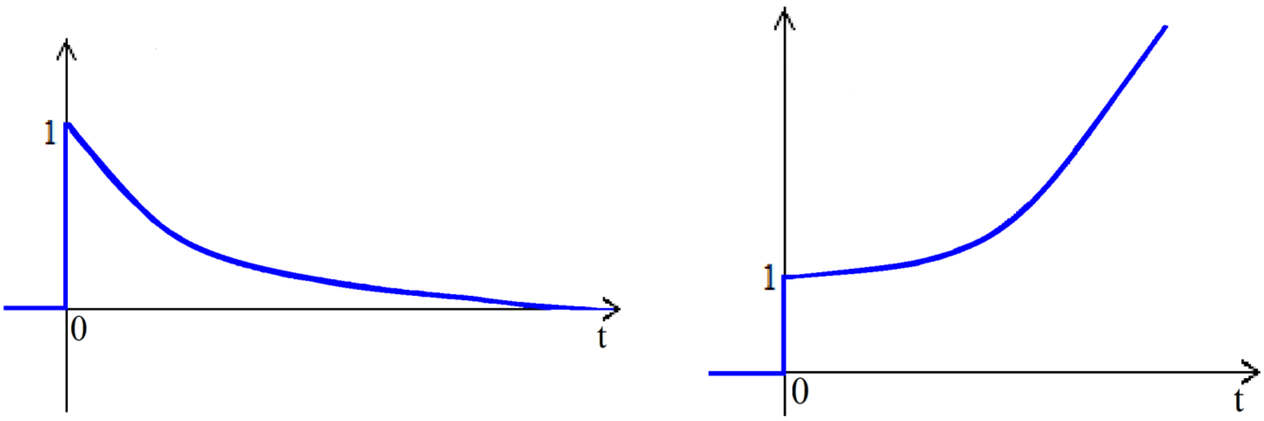


Fig. 5.3 – Os sinais $x(t) = e^{-at} \cdot u_1(t)$, para a > 0, exponencial decrescente (à esquerda), e para a < 0, exponencial crescente (à direita).

$$x(t) = e^{-at} \cdot u_1(t),\ a = 0$$

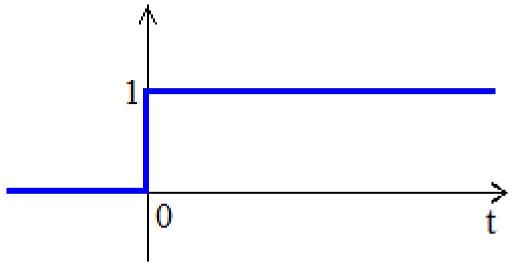


Fig. 5.4 – O sinal $x(t) = e^{-at} \cdot u_1(t)$, a = 0 (*degrau unitário*).

Calculando a Transformada de Laplace de x(t), pela definição [eq. (5.1)], temos que:

$$\mathscr{L}\,[x(t)] = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{-at}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t(s+a)} \cdot\, dt \;=\; \left.\frac{-1}{(s+a)}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

ou seja, Transformada de Laplace de um sinal exponencial é dada por:

$$\mathscr{L}\,[e^{-at}] = \frac{1}{(s+a)} \qquad \text{eq. (5.3)}$$

<u>Exemplo 5.1</u>:

Considere os sinais $x(t) = e^{-3,5t}, t > 0$ (decrescente) e $y(t) = e^{3,5t}, t > 0$ (crescente). Logo, as Transformadas de Laplace destes sinais são:

$$X(s) = \frac{1}{(s+3,5)} \qquad \text{e} \qquad Y(s) = \frac{1}{(s-3,5)}$$

□

■ Sinal impulso unitário

$$x(t) = u_o(t)$$

Para o sinal impulso unitário, usando novamente a definição da Transformada de Laplace [eq. (5.1)], temos:

$$\mathscr{L}\,[x(t)] = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot u_o(t)\, dt$$

e agora, usando eq. (3.10) para a convolução acima de e^{-st} com o impulso unitário $u_o(t)$,

$$\mathscr{L}\,[x(t)] = e^{-s\cdot 0} = e^{0}$$

$$= 1$$

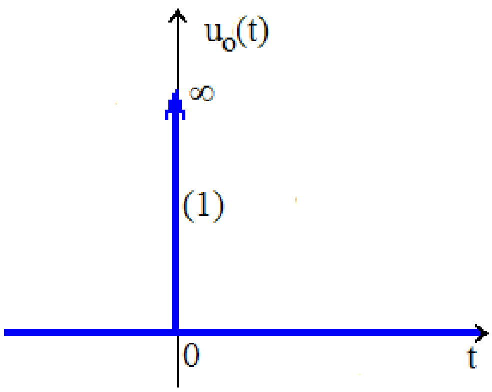


Fig. 5.5 – O sinal $x(t) = u_o(t)$, (*impulso unitário*).

Logo, Transformada de Laplace do impulso unitário $u_o(t)$ é dada por:

$$\mathscr{L}[u_o(t)] = 1 \qquad \text{eq. (5.4)}$$

Sinal degrau unitário $u_1(t)$

Embora já visto acima como caso particular do sinal $x(t) = e^{-at}$, para $t = 0$, vamos considerar novamente, agora como um sinal da família dos sinais singulares:

$$x(t) = u_1(t)$$

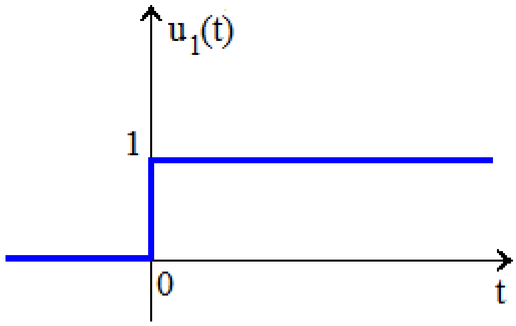


Fig. 5.6 – O sinal $x(t) = u_1(t)$, *degrau unitário*.

Novamente, pela definição da Transformada de Laplace [eq. (5.1)], temos que:

$$\mathscr{L}[x(t)] = X(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot u_1(t)\, dt$$

$$= \left.\frac{-1}{s}\right|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s}$$

Logo, Transformada de Laplace do degrau unitário $u_1(t)$ é dada por:

$$\mathscr{L}[u_1(t)] = \frac{1}{s} \qquad \text{eq. (5.5)}$$

De forma semelhante pode-se calcular a *Transformada de Laplace* de outros sinais conhecidos como:

$u_2(t)$, a rampa unitária,

e demais sinais singulares contínuos: $u_3(t)$, $u_4(t)$, … , $u_n(t)$, assim como também do seno, do co-seno, etc.

sen ωt, cos ωt, $e^{-at} \cdot$ sen ωt, $e^{-at} \cdot$ cos ωt, etc.

■ Sinal rampa unitária $u_2(t)$

$$x(t) = u_2(t)$$

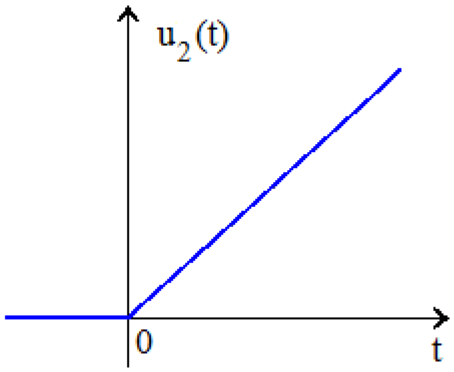


Fig. 5.7 – O sinal $x(t) = u_2(t)$, *rampa unitária*.

e a Transformada de Laplace $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ é dada por:

$$\mathscr{L}[u_2(t)] = \frac{1}{s^2} \qquad \text{eq. (5.6)}$$

■ Sinal semi-parabólico $u_3(t)$

$$x(t) = u_3(t)$$

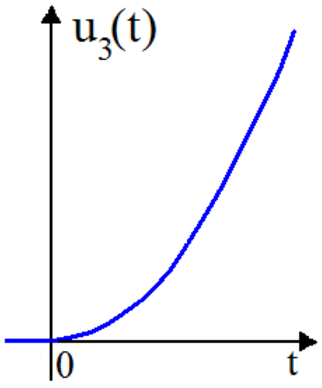


Fig. 5.8 – O sinal $x(t) = u_3(t)$, *sinal semi-parabólico*.

A Transformada de Laplace $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ é dada por:

$$\mathscr{L}[u_3(t)] = X(s) = \frac{1}{s^3}$$

Os demais sinais singulares

Os resultados anteriores, para $u_o(t)$, impulso, $u_1(t)$, degrau, $u_2(t)$, rampa e $u_3(t)$, semi-parábola podem facilmente serem generalizados para toda a família de sinais singulares contínuos $u_n(t)$, $n \geq 0$ vistos no capítulo 3:

$$x(t) = u_n(t), \;\; n \geq 0$$

A Transformada de Laplace $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ é dada por:

$$\mathscr{L}[u_n(t)] = \frac{1}{s^n} \qquad \text{eq. (5.7)}$$

Sinais seno e co-seno

$$x(t) = \text{sen}\,\omega t \cdot u_1(t) \qquad\qquad x(t) = \cos\omega t \cdot u_1(t)$$

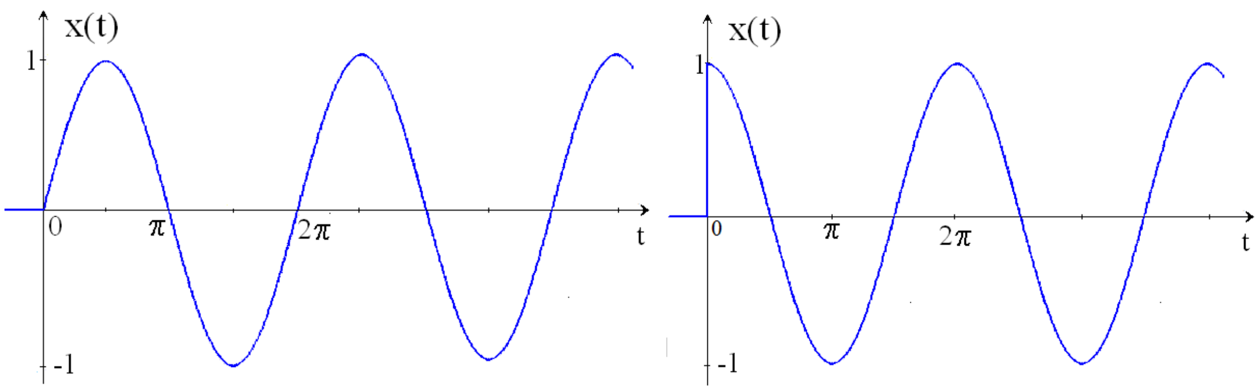


Fig. 5.9 – Os sinais $x(t) = \text{sen}\,\omega\,t \cdot u_1(t)$ (à esquerda), e $x(t) = \cos\omega\,t \cdot u_1(t)$ (à direita).

A Transformada de Laplace do seno é dada por:

$$\mathscr{L}[\text{sen}\,\omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \qquad \text{eq. (5.8)}$$

e a Transformada de Laplace do co-seno é dada por:

$$\mathscr{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \qquad \text{eq. (5.9)}$$

5.4 – **Propriedades da Transformada de Laplace**

Muitas das propriedades que aqui mostramos são análogas às vistas anteriormente para Série de Fourier (capítulo 5) e Transformadas de Fourier (capítulo 6).

Considere que x(t), $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são sinais contínuos.

- Homogeneidade:

$$\mathscr{L}\,[\,k\,x(t)] = k\,\mathscr{L}\,[\,x(t)]$$

- Aditividade:

$$\mathscr{L}\,[\,x_1(t) + x_2(t)\,] = \mathscr{L}\,[\,x_1(t)] + \mathscr{L}\,[\,x_2(t)]$$

- Linearidade:

Como já vimos em anteriormente, a linearidade é a propriedade da *aditividade* e da *homogeneidade* juntas:

$$\mathscr{L}\,[\,\alpha\,x_1(t) + \beta\,x_2(t)\,] = \alpha\,\mathscr{L}\,[\,x_1(t)] + \beta\,\mathscr{L}\,[\,x_2(t)]$$

- Sinal transladado ("*time shifting*"):

$$\mathscr{L}\,[\,x(t-a)\,u_1(t-a)\,] = e^{-as}\,\mathscr{L}\,[x(t)] = e^{-as}\cdot X(s)$$

- Sinal multiplicado por exponencial e^{-at}:

$$\mathscr{L}\,[\,e^{-at}x(t)\,] = X(s+a)$$

onde X(s) = $\mathscr{L}\,[\,x(t)]$.

Estas duas últimas propriedades são duais uma da outra pois: enquanto uma diz que a transformada do *sinal transladado* fica multiplicada por uma *exponencial*, a outra diz que a transformada de um sinal multiplicado por uma *exponencial* é um *sinal transladado*.

■ Derivadas:

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = s\cdot X(s) \; - \; x(0) \qquad \text{eq. (5.10)}$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right] = s^2\cdot X(s) \; - \; s\cdot x(0) \; - \; x'(0) \qquad \text{eq. (5.10a)}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right] = s^n X(s) \; - \; s^{n-1}\cdot x(0) - \cdots \\ \cdots - \; s\cdot x^{(n-2)}(0) \; - \; x^{(n-1)}(0)\end{aligned} \qquad \text{eq. (5.10b)}$$

Os termos $x(0)$, $s\cdot x(0)$, $x'(0)$, etc nas fórmulas acima são chamados de “*resíduos*”.

Note que se x(t) tem condições iniciais nulas, isto é, se

$$x(0) = 0,\; x'(0) = 0,\; x''(0) = 0,\; \cdots \;,\; \text{etc.}$$

então os *resíduos* são todos nulos e derivar (em t) equivale a multiplicar por s (*no domínio s*, da frequência, de Laplace). Isto é, neste caso:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}\,[x'(t)] &= s\cdot X(s) \\ \mathscr{L}\,[x''(t)] &= s^2\cdot X(s) \\ &\vdots \\ \mathscr{L}\left[x^{(n)}(t)\right] &= s^n\cdot X(s) \end{aligned}\right\} \qquad \text{eq. (5.11)}$$

Na verdade os resíduos aparecem porque tomamos a Transformada de Laplace unilateral. No caso da Transformada de Laplace bilateral não há resíduos e as transformadas das derivadas têm o resultado das equações em eq. (5.11).

Entretanto, na Transformada de Laplace unilateral, que estamos considerando aqui, somente no caso em que as condições iniciais são nulas é que isso ocorre, isto é, somente no caso em que $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$, $\cdots$ é que as equações em eq. (5.11) são válidas.

- Integral:

$$\mathscr{L}\left[\int x(t)\,dt\right] = \frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s}\cdot\left[\int_{-\infty}^{t} x(t)\cdot dt\right]_{t=0}$$

Aqui os *resíduos* são diferentes do caso da derivada. Entretanto, da mesma forma que derivar (em t) equivale a multiplicar por s (*no domínio da frequência*), sob certas condições integrar (em t) equivale a dividir por s (*no domínio da frequência*). Ou seja, se

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)\cdot dt\,\bigg|_{t=0} = 0$$

Então a propriedade torna-se:

$$\mathscr{L}\left[\int x(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}\cdot X(s).$$

- Mudança de escala do tempo (“*time scaling*”):

$$\mathscr{L}\left[x\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha\cdot X(\alpha\, s)\,, \quad \alpha > 0$$

Se o eixo da variável “t” for *encolhido* ($0 < \alpha < 1$), então a Transformada de Laplace de x(t) ficará *esticada* (em s).

Se o eixo da variável “t” for *esticado* ($\alpha > 1$) então a Transformada de Laplace de x(t) ficará *encolhida* (em s).

Equivalentemente, esta propriedade pode ser escrita como

$$\mathscr{L}[x(kt)] = \frac{1}{k}\cdot X\left(\frac{s}{k}\right), \quad k > 0$$

■ Sinal multiplicado por t

$$\mathscr{L}[t \cdot x(t)] = -\frac{dX(s)}{ds}$$

Novamente aqui temos uma dualidade. Esta última propriedade e a propriedade da derivada são duais uma da outra pois: enquanto uma diz que a transformada da *derivada de* x(t) é X(s) *vezes* s, a outra diz que a transformada de x(t) *vezes* t é a *derivada de* X(s).

■ Sinal multiplicado por 1/t

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{t} \cdot x(t)\right] = \int_s^{\infty} X(s)ds$$

Mais uma vez aqui temos uma dualidade. Esta última propriedade é dual da propriedade da integral pois, enquanto uma diz que a transformada da *integral de* x(t) é X(s) *dividido por* s, a outra diz que a transformada de x(t) *dividido por* t é um *integral de* X(s).

■ Convolução

$$\mathscr{L}[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(s) \cdot X_2(s) \qquad \text{eq. (5.12)}$$

Portanto, a Transformada de Laplace da convolução de dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é o produto das transformadas $X_1(s)$ e $X_2(s)$ destes dois sinais.

Recorde-se que a definição de convolução entre dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ (capítulo 4, secções 4.3 e 4.4):

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &= \int_0^t x_1(t-\tau) \cdot x_2(\tau) \cdot d\tau \\ &= \int_0^t x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \end{aligned} \qquad \text{eq. (5.13)}$$

Ou seja, a Transformada de Laplace transforma esta conta complicada da eq. (5.13) em uma simples multiplicação, eq. (5.12).

5.5 – **Teorema do Valor Inicial (TVI) e Teorema do Valor Final (TVF)**

Os teoremas do valor inicial (TVI) e do valor final (TVF) permitem que se descubra o valor inicial $x(0^+)$ e o valor final $x(\infty)$ dos sinais x(t) cuja Transformada de Laplace X(s) sejam conhecidas.

- Teorema do Valor Inicial (TVI)

$$x(0^+) \triangleq \lim_{t \to 0^+} x(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot X(s) \qquad \text{eq. (5.14)}$$

- Teorema do Valor Final (TVF)

$$x(\infty) \triangleq \lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot X(s) \qquad \text{eq. (5.15)}$$

Exemplo 5.2:

Considere o sinal exponencial decrescente $x(t) = e^{-at} \cdot u_1(t)$, $a > 0$, cuja Transformada de Laplace é dada por:

$$X(s) = \frac{1}{(s+a)}$$

Aplicando-se os teoremas TVI e TVF das equações eq. (5.14) e eq. (5.15) obtemos:

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} s \cdot X(s) = \lim_{s \to \infty} s \cdot \frac{1}{(s+a)} = 1$$

e

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot X(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{(s+a)} = 0$$

que estão de acordo com o esperado pois

$$x(0) = e^0 = 1 \qquad \text{e} \qquad x(\infty) = \lim_{t \to \infty} e^{-at} = 0.$$

□

<u>Exemplo 5.3</u>:

Considere o sinal x(t) cuja Transformada de Laplace é dada por:

$$X(s) = \frac{4s+1}{(s^2+2s)}$$

Aplicando-se os teoremas TVI e TVF das equações eq. (5.14) e eq. (5.15) obtemos:

$$x(0^+) = \lim_{s\longrightarrow\infty} s\cdot X(s) = \lim_{s\longrightarrow\infty} s\cdot\frac{4s+1}{s(s+2)} = \lim_{s\longrightarrow\infty}\frac{4s+1}{(s+2)} = 4$$

$$x(\infty) = \lim_{s\longrightarrow 0} s\cdot X(s) = \lim_{s\longrightarrow 0} s\cdot\frac{4s+1}{s(s+2)} = \lim_{s\longrightarrow 0}\frac{4s+1}{(s+2)} = \frac{1}{2}$$

ou seja,

$$x(0) = 4 \qquad \text{e} \qquad x(\infty) = 0{,}5$$

□

<u>Exemplo 5.4</u>:

Considere o sinal x(t) cuja Transformada de Laplace é dada por:

$$X(s) = \frac{3}{(s^2+2s)}$$

Aplicando-se os teoremas TVI e TVF das equações eq. (5.14) e eq. (5.15) obtemos:

$$x(0^+) = \lim_{s\longrightarrow\infty} s\cdot X(s) = \lim_{s\longrightarrow\infty} s\cdot\frac{3}{s(s+2)} = \lim_{s\longrightarrow\infty}\frac{3}{(s+2)} = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{s\longrightarrow 0} s\cdot X(s) = \lim_{s\longrightarrow 0} s\cdot\frac{3}{s(s+2)} = \lim_{s\longrightarrow 0}\frac{3}{(s+2)} = \frac{3}{2}$$

ou seja,

$$x(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad x(\infty) = 1{,}5$$

□

Exemplo 5.5:

Considere o sinal da rampa unitária $x(t) = u_2(t)$, cuja Transformada de Laplace é dada pela eq. (5.6):

$$X(s) = \frac{1}{s^2}$$

Aplicando-se os teoremas TVI e TVF das equações eq. (5.14) e eq. (5.15) obtemos:

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\cdot X(s) = \lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s} = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot X(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s} = \infty$$

que estão de acordo com o esperado pois

$$x(0) = u_2(0) = 0 \quad \text{e} \quad x(\infty) = u_2(\infty) = \infty$$

□

Exemplo 5.6:

Considere o sinal exponencial x(t) cuja Transformada de Laplace é dada por:

$$X(s) = \frac{1}{(s^2+s+1)}$$

Aplicando-se os teoremas TVI e TVF das equações eq. (5.14) e eq. (5.15) obtemos:

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\cdot X(s) = \lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{1}{(s^2+s+1)} = \lim_{s\to\infty}\frac{s}{(s^2+s+1)} = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot X(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{(s^2+s+1)} = \lim_{s\to 0}\frac{s}{(s^2+s+1)} = 0$$

ou seja,

$$x(0) = 0 \quad \text{e} \quad x(\infty) = 0$$

□

5.6 – **Alguns exemplos de Transformadas de Laplace**

Exemplo 5.7:

Considere o sinal da figura 5.8.

$$x(t) = 2\ u_o(t - a)$$

A Transformada de Laplace deste sinal é dada por:

$$X(s) = 2\ e^{-as}.$$

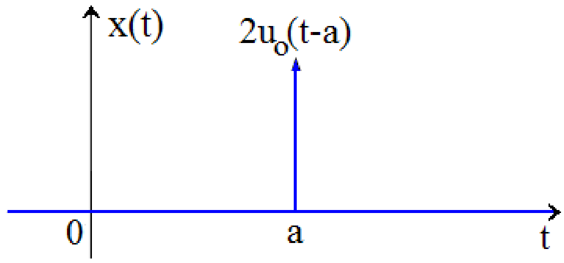


Fig. 5.10 – O sinal $x(t) = 2\ u_o(t–a)$.

O resultado acima é facilmente obtido aplicando-se as propriedades da homogeneidade e da translação ("*time shifting*") visto que $\mathscr{L}[u_0(t)] = 1$.

□

Exemplo 5.8:

Considere o sinal da figura 5.9. Escrevendo este sinal em termos de sinais singulares obtemos:

$$x(t) = -\frac{2}{3} u_1(t - a)$$

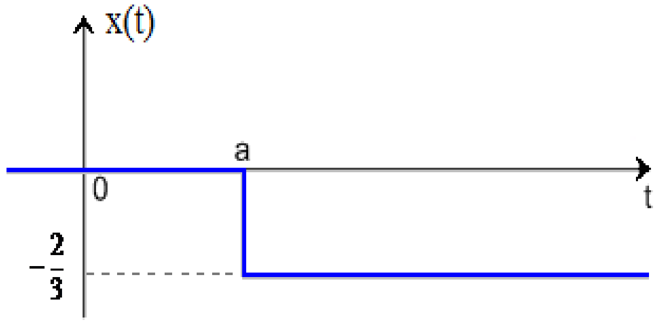


Fig. 5.11 – O sinal $x(t) = (–2/3)\ u_1(t – a)$.

E portanto a Transformada de Laplace é dada por:

$$X(s) = -\frac{2e^{-as}}{3s}$$

O resultado é obtido facilmente ao aplicar as propriedades da homogeneidade e da translação ("*time shifting*") visto que $\mathscr{L}[u_1(t)] = 1/s$.

□

Exemplo 5.9:

Considere o sinal x(t) da figura 5.10. Escrevendo este sinal em termos de sinais singulares obtemos:

$$x(t) = u_2(t) - u_2(t-1) - u_1(t-3)$$

E portanto a Transformada de Laplace é dada por:

$$X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

O resultado é obtido facilmente visto que $\mathscr{L}[u_1(t)] = 1/s$, que $\mathscr{L}[u_2(t)] = 1/s^2$ e aplicando-se as propriedades da aditividade e da translação (“*time shifting*”).

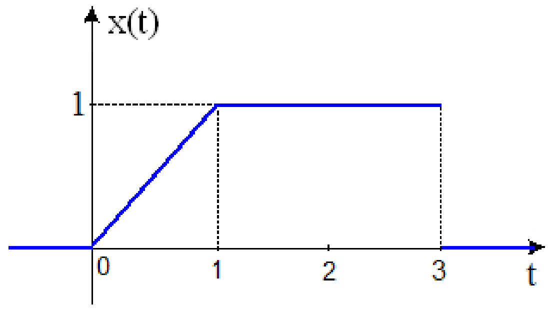


Fig. 5.12 – O sinal x(t)

Exemplo 5.10:

Já vimos na secção anterior que a Transformada de Laplace do degrau unitário $u_1(t)$ é dada pela eq. (5.5):

$$\mathscr{L}[u_1(t)] = \frac{1}{s}$$

Também vimos no capítulo 2 (*Sinais Singulares*) que a derivada do degrau $u_1(t)$ é o impulso $u_o(t)$:

$$u_o(t) = \frac{du_1(t)}{dt}$$

e que $u_1(0^-) = 0$, ou seja a condição inicial para $u_1(t)$ é nula. Portanto, aplicando-se a propriedade da derivada para as Transformada de Laplace temos que:

$$\mathscr{L}[u_o(t)] = s \cdot \mathscr{L}[u_1(t)] - u_1(0^-) = s \cdot \frac{1}{s} - 0 = 1$$

ou seja, $\mathscr{L}[u_o(t)] = 1$, da eq. (5.4), como era de se esperar.

Semelhantemente, as Transformadas de Laplace de todos os sinais singulares $u_n(t)$, $n \geq 1$ podem ser calculadas recursivamente e obtendo-se os já conhecidos resultados: $\mathscr{L}[u_1(t)] = 1/s$, $\mathscr{L}[u_2(t)] = 1/s^2$, ⋯ , $\mathscr{L}[u_n(t)] = 1/s^n$.

$$\mathscr{L}[u_1(t)] = s \cdot \mathscr{L}[u_2(t)] - u_2(0^-) = s \cdot \frac{1}{s^2} - 0 = \frac{1}{s}$$

$$\mathscr{L}[u_2(t)] = s \cdot \mathscr{L}[u_3(t)] - u_3(0^-) = s \cdot \frac{1}{s^3} - 0 = \frac{1}{s^2}$$

$$\vdots$$

$$\mathscr{L}[u_n(t)] = s \cdot \mathscr{L}[u_{n+1}(t)] - u_{n+1}(0^-) = s \cdot \frac{1}{s^{n+1}} - 0 = \frac{1}{s^n}$$

□

Exemplo 5.11:

Olhando no sentido inverso do exemplo anterior podemos calcular as Transformadas de Laplace dos sinais singulares aplicando-se a propriedade da integral. Como

$$u_n(t) = \int_{-\infty}^{t} u_{n-1}(t)\, dt\,, \quad \forall\, n$$

e como

$$\left[\int_{-\infty}^{t} u_{n-1}(t) \cdot dt \right]_{t=0} = 0\,, \quad \forall\, n$$

então

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[u_n(t)] &= \mathscr{L}\left[\int u_{n-1}(t)\, dt \right] \\ &= \frac{1}{s} \cdot \mathscr{L}[u_{n-1}(t)] + \frac{1}{s} \cdot \left[\int_{-\infty}^{t} u_{n-1}(t) \cdot dt \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^{n-1}} + 0 \\ &= \frac{1}{s^n} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathscr{L}[u_n(t)] = \frac{1}{s^n}$$

Da eq. (5.7), como era de se esperar.

□

Exemplo 5.12:

Considere o sinal x(t) da figura 5.13.

Escrevendo este sinal em termos de sinais singulares obtemos:

$$x(t) = a \cdot u_1(t+2).$$

Nitidamente $x(t) \neq 0$ para valores de $t < 0$.

Portanto, este sinal não tem Transformada de Laplace unilateral conforme definida na eq. (5.1).

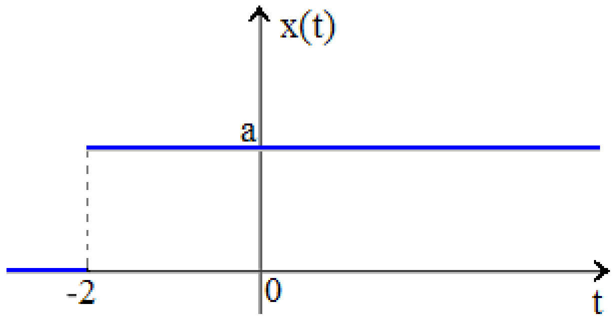


Fig. 5.13 – O sinal x(t)) = a u_1(t+2).

□

Exemplo 5.13:

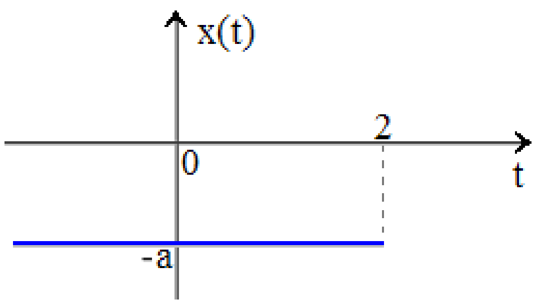


Fig. 5.14 – O sinal x(t) = a u_1(2 – t).

Considere o sinal x(t) da figura 5.14.

Este sinal em termos de sinais singulares tem a expressão:

$$x(t) = a \cdot u_1(2-t)$$

Mas nitidamente aqui também $x(t) \neq 0$ para valores de $t < 0$.

Portanto, aqui novamente, este sinal não possui Transformada de Laplace unilateral conforme definida na eq. (5.1).

□

Exemplo 5.14:

Considere o sinal exponencial $x_1(t) = e^{-t} \cdot u_1(t)$ cuja Transformada de Laplace é dada pela eq. (5.3):

$$\mathscr{L}[x_1(t)] = X_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

Se o eixo t for esticado de 5 vezes (por uma mudança de escala), este sinal se torna em $x_2(t)$, também exponencial:

$$x_2(t) = x_1\left(\frac{t}{5}\right) = e^{-0.2t} \cdot u_1(t)$$

cuja Transformada de Laplace é dada por (usando a transformada da exponencial)

$$\mathscr{L}[x_2(t)] = X_2(s) = \mathscr{L}\left[e^{-\frac{t}{5}}\right] = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{5}\right)}$$

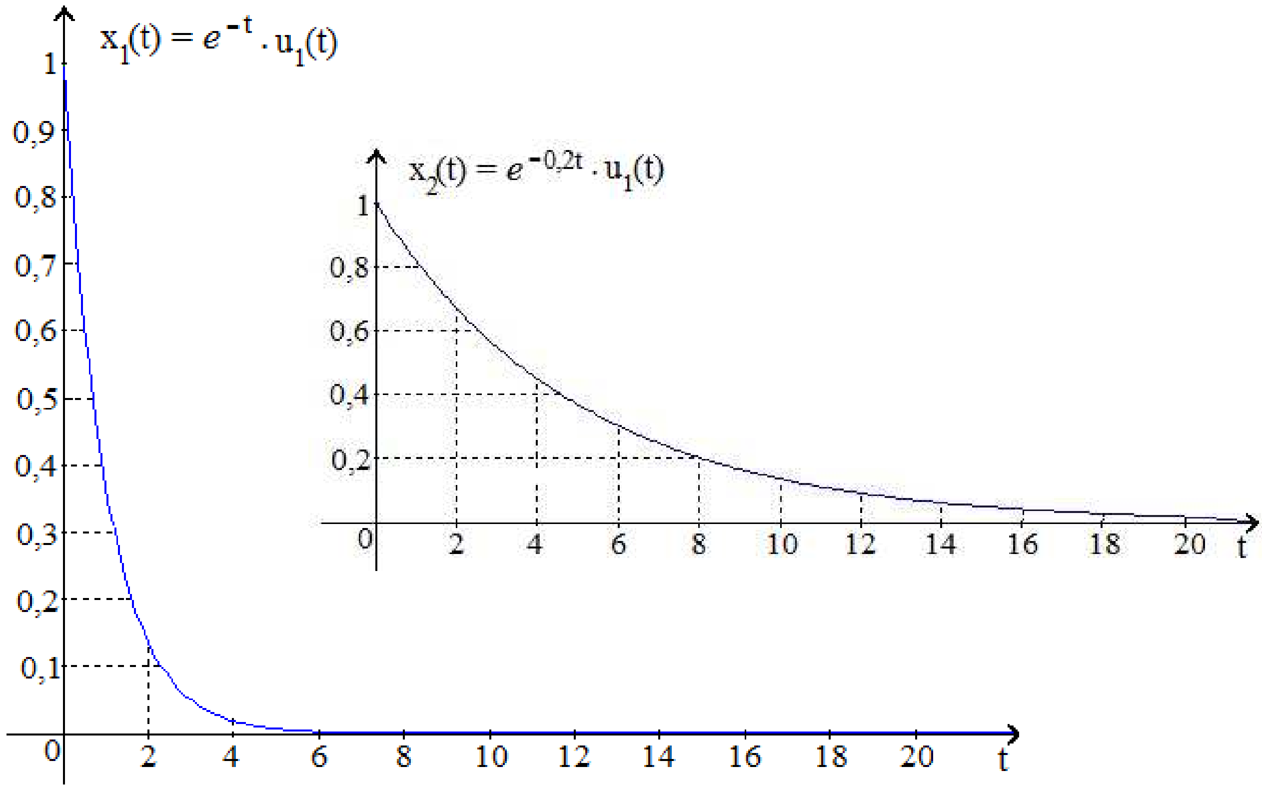


Fig. 5.15 – Os sinais $x_1(t) = e^{-t} \cdot u_1(t)$ e $x_2(t) = e^{-0.2t} \cdot u_1(t)$ são de certa forma o mesmo sinal escritos em escalas de tempo diferentes. Um tem o eixo dos ‘t’ 5 vezes mas esticado que o outro.

Usando a propriedade da mudança de escala (“*time scaling*”) obtemos o mesmo $X_2(s)$ obtido acima:

$$\mathscr{L}[x_2(t)] = X_2(s) = 5 \cdot X(5\,s)$$

$$= \frac{5}{(5s+1)}$$

$$= \frac{1}{\left(s + \frac{1}{5}\right)}$$

□

Exemplo 5.15:

Considere o sinal sinusoidal

$$x(t) = \text{sen}\,\omega t \cdot u_1(t)$$

cuja Transformada de Laplace é dada por [usando a transformada do seno eq. (5.8)]

$$\mathscr{L}[x(t)] = X(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \qquad \text{eq. (5.16)}$$

vamos calcular a Transformada de Laplace co-seno, isto é, do sinal y(t)

$$y(t) = \cos \omega t \cdot u_1(t)$$

usando apenas as propriedades da Transformada de Laplace. Primeiramente, como a derivada do seno é o co-seno, ou melhor,

$$\frac{d}{dt}(\text{sen}\,\omega t) = \omega \cdot \cos \omega t$$

então, usando a propriedade da derivada para Transformada de Laplace, eq. (5.10), temos que:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}\,x(t)\right] &= \omega \cdot \mathscr{L}[\cos \omega t] - \text{sen}(0) \\ &= \omega \cdot \mathscr{L}[\cos \omega t] \end{aligned} \qquad \text{eq. (5.17)}$$

Por outro lado, usando novamente a propriedade da derivada para Transformada de Laplace, mas agora para a eq. (5.16), temos que:

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}\,x(t)\right] = s \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \omega \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \qquad \text{eq. (5.18)}$$

e agora, comparando a eq. (5.17) com a eq. (5.18) concluímos que transformada do co-seno é dada por:

$$\mathscr{L}[\cos \omega t] = \mathscr{L}[y(t)] = Y(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

que corresponde à eq. (5.9) que foi calculada pela definição de Transformada de Laplace.

□

Exemplo 5.16:

Os sinais cujas Transformadas de Laplace são mostrados na eq. (5.19) podem ser vistos como sinais singulares [$u_1(t) = 1$, $u_2(t)/2 = t$, $u_3(t)/6 = t^2$, … , $u_3(t)/n! = t^n$] multiplicados por exponencial ou, alternativamente, como o sinal exponencial multiplicado por t, por t^2, por t^3, …

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{L}[e^{-at}] = \frac{1}{(s+a)} \\
&\mathscr{L}[t \cdot e^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^2} \\
&\mathscr{L}[t^2 \cdot e^{-at}] = \frac{2}{(s+a)^3} \\
&\mathscr{L}[t^3 \cdot e^{-at}] = \frac{6}{(s+a)^4} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\mathscr{L}[t^n \cdot e^{-at}] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \quad \text{eq. (5.19)}$$

As relações da eq. (5.19) podem ser demonstradas de duas formas diferentes:

i) aplicando-se a propriedade da multiplicação por exponencial para os sinais singulares $u_n(t)$ (degrau, rampa, etc.) divididos por n! pois, como já visto anteriormente na eq. (3.19),

$$u_{n+1}(t) = \frac{t^n}{n!}, \quad t > 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

ou, alternativamente,

ii) aplicando-se recursivamente a propriedade do sinal multiplicado por t para o sinal exponencial.

□

Exemplo 5.17:

Sinais oscilatórios amortecidos do tipo *seno* ou *co-seno* multiplicados por *exponenciais decrescentes* são comuns em sistemas estáveis.

- Considere o caso do ***seno*** amortecido:

$$x(t) = e^{-at} \cdot \text{sen}\,\omega t \cdot u_1(t)$$

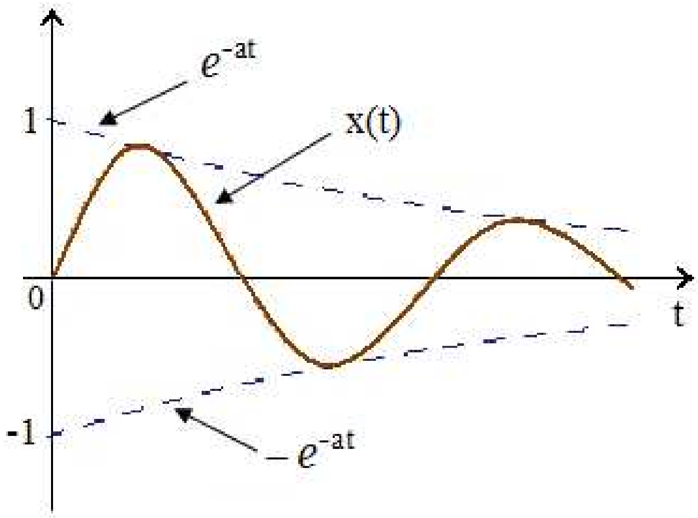


Fig. 5.16 – O sinal oscilatório amortecido $x(t) = e^{-at} \cdot \text{sen}(\omega t) \cdot u_1(t)$.

Aplicando-se a propriedade do sinal multiplicado por exponencial facilmente obtêm-se:

$$X(s) = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

- Considere agora o caso do ***co-seno*** amortecido:

$$x(t) = e^{-at} \cdot \cos\omega t \cdot u_1(t)$$

Aplicando-se novamente a propriedade do sinal multiplicado por exponencial facilmente obtêm-se:

$$X(s) = \frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

□

5.7 – Tabela da Transformada de Laplace de alguns sinais conhecidos

$x(t)$	$X(s) = \mathscr{L}\{ x(t) \}$
$x(t) = u_o(t)$	$X(s) = 1$
$x(t) = u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{1}{s}$
$x(t) = u_2(t)$	$X(s) = \dfrac{1}{s^2}$
$x(t) = u_3(t)$	$X(s) = \dfrac{1}{s^3}$
$x(t) = u_n(t)$	$X(s) = \dfrac{1}{s^n}$
$x(t) = e^{-at} \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{1}{(s+a)}$
$x(t) = t \cdot e^{-at} \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{1}{(s+a)^2}$
$x(t) = t^2 \cdot e^{-at} \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{2}{(s+a)^3}$
$x(t) = t^3 \cdot e^{-at} \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{3!}{(s+a)^4}$
$x(t) = t^n \cdot e^{-at} \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$x(t) = \text{sen}\ \omega t \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$x(t) = \cos\ \omega t \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$
$x(t) = e^{-at} \cdot \text{sen}\ \omega t \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$x(t) = e^{-at} \cdot \cos \cdot \omega t \cdot u_1(t)$	$X(s) = \dfrac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

5.8 – **Transformada Inversa de Laplace**

Nesta secção vamos desenvolver as técnicas de encontrar o sinal x(t) cuja Transformada de Laplace X(s) é conhecida. Ou seja, vamos calcular a Transformada inversa de Laplace de X(s).

$$\mathscr{L}^{-1}\,[\,X(s)] = x(t)$$

As Transformadas de Laplace dos principais sinais de interesse para sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT) vêm em forma de uma *fracção racional*, ou seja, uma fracção do tipo:

$$\frac{p(s)}{q(s)} \qquad \text{eq. (5.20)}$$

onde p(s) e q(s) são polinómios.

Conforme podemos observar na tabela da secção anterior, as Transformadas de Laplace de muitos sinais vêm todas na forma eq. (5.20) onde p(s) e q(s) são polinómios menores, isto é, do primeiro ou segundo grau.

Note também que em muitos casos p(s), o polinómio do numerador, tem apenas o termo independente (i.e., uma constante)

$$p(s) = 1, \quad p(s) = 2, \quad p(s) = 3!, \quad p(s) = n!, \quad \text{ou} \quad p(s) = \omega.$$

Em outras situações p(s) é um polinómio do primeiro grau:

$$p(s) = s \quad \text{ou} \quad p(s) = (s + a).$$

Sinais mais complexos são a combinação linear de sinais que aparecem na tabela da secção anterior e também apresentam transformadas do tipo eq. (5.20) e devem ser desmembrados em fracções parciais menores para obtermos a transformada inversa.

Esse processo de desmembrar o X(s) na forma de fracção eq. (5.20) é chamada de expansão em fracções parciais. Vamos apresentar, através de exemplos, três casos de expansão em fracções parciais.

A fracção racional da eq. (5.20) é a função de transferência de um sistema; as raízes do polinómio q(s) do denominador são chamadas de ***pólos***. Os três casos que veremos são: ***pólos reais e distintos***, ***pólos complexos*** e ***pólos múltiplos***. Os demais casos serão apenas combinações destes 3 casos, como veremos nos exemplos da próxima secção.

Caso 1 – **Pólos reais e distintos**:

No caso de pólos reais e distintos

$$s = a,$$
$$s = b,$$
$$\vdots$$

q(s) pode ser factorado em

$$q(s) = (s + a) \cdot (s + b) \ \ldots$$

e a expansão em fracções parciais deve ser da seguinte forma:

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A}{(s+a)} + \frac{B}{(s+b)} + \ \ldots \qquad \text{eq. (5.21)}$$

Caso 2 – **Pólos complexos conjugados**:

No caso de pólos complexos conjugados, então q(s) pode ser expresso como:

$$q(s) = (as^2 + bs + c) \ldots \qquad \text{com} \qquad \Delta = (b^2 - 4ac) < 0$$

e a expansão em fracções parciais deve ser da seguinte forma:

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{As+B}{(as^2+bs+c)} + \ \ldots \qquad \text{eq. (5.22)}$$

Caso 3 – **Pólos múltiplos** (duplos, triplos, etc.):

No caso de pólos múltiplos (i.e., pólos duplos, triplos, etc.), então q(s) pode ser expresso como:

$$q(s) = (s + a)^3 \ \ldots$$

e a expansão em fracções parciais deve ser da seguinte forma:

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A}{(s+a)^3} + \frac{B}{(s+a)^2} + \frac{C}{(s+a)} + \ \ldots \qquad \text{eq. (5.23)}$$

Uma vez escrita nas formas eq. (5.21), eq. (5.22) e eq. (5.23), ou combinações destas, torna-se fácil achar a transformada inversa de Laplace fracção a fracção, com o uso da propriedade da linearidade e da tabela da secção anterior.

Por exemplo, no caso da eq. (5.21):

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{A}}{(\mathrm{s}+\mathrm{a})}\right]=\mathrm{A}\cdot e^{-\mathrm{at}}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{B}}{(\mathrm{s}+\mathrm{b})}\right]=\mathrm{B}\cdot e^{-\mathrm{at}}$$

$$\vdots$$

No caso da eq. (5.22), ela pode ser reescrita como

$$\frac{\mathrm{As}+\mathrm{B}}{(\mathrm{as}^2+\mathrm{bs}+\mathrm{c})}=\frac{\mathrm{As}}{(\mathrm{as}^2+\mathrm{bs}+\mathrm{c})}+\frac{\mathrm{B}}{(\mathrm{as}^2+\mathrm{bs}+\mathrm{c})}$$

$$=\frac{\mathrm{As}}{(\mathrm{s}+\alpha)^2+\omega^2}+\frac{\left(\frac{\mathrm{B}}{\omega}\right)\cdot\omega}{(\mathrm{s}+\alpha)^2+\omega^2}$$

e o cálculo das transformadas inversas

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{As}}{(\mathrm{s}+\alpha)^2+\omega^2}\right] \quad \mathrm{e} \quad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{B}/\omega}{(\mathrm{s}+\alpha)^2+\omega^2}\right]$$

não é difícil de ser feito dando como resultado sinais do tipo

$$\mathrm{x(t)}=\mathrm{A}\cdot e^{-\alpha\mathrm{t}}\cdot\cos\omega\mathrm{t}\cdot\mathrm{u}_1(\mathrm{t})$$

e

$$\mathrm{x(t)}=\frac{\mathrm{B}}{\omega}\cdot e^{-\alpha\mathrm{t}}\cdot\mathrm{sen}\,\omega\mathrm{t}\cdot\mathrm{u}_1(\mathrm{t})$$

respectivamente.

No caso da eq. (5.23):

$$\vdots$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A}{(s+a)^3}\right] = \frac{A}{2}\cdot t^2 \cdot e^{-at}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{B}{(s+a)^2}\right] = B\cdot t \cdot e^{-at}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{C}{(s+a)}\right] = C\cdot e^{-at}$$

Exemplo 5.18:

$$X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \qquad \text{eq. (5.24)}$$

Este é um caso de pólos reais e distintos. Para achar a transformada inversa de Laplace de X(s) fazemos a expansão em fracções parciais:

$$X(s) = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)}$$

$$= \frac{(A + B)s + (2A + B)}{(s+1)(s+2)}$$

e igualando o numerador $(A + B)s + (2A + B)$ com (s + 3), o numerador de X(s) na eq. (5.24), temos que:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + B = 3 \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$$

e portanto,

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+2)}\right]$$

$$= 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad t > 0$$

□

Exemplo 5.19:

$$X(s) = \frac{2s^2 + 7s + 7}{(s+1)(s+2)}$$

Aqui observamos que grau denominador e do numerador são o mesmo. Então, dividindo-se facilmente obtemos que

$$X(s) = 2 + \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

mas

$$\mathscr{L}^{-1}[\,2] = 2 \cdot u_0(t)$$

e

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right]$$

já foi calculado no exemplo anterior (Exemplo 5.18), logo:

$$x(t) = 2 \cdot u_0(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad t > 0$$

□

Exemplo 5.20:

$$X(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)} \qquad \text{eq. (5.25)}$$

Este é um caso de combinação de um pólo real distinto (s = 0) e um par de pólos complexos. Para achar a transformada inversa de Laplace de X(s) fazemos a expansão em fracções parciais:

$$\mathrm{X(s)} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{Bs+C}}{\mathrm{s^2+s+1}}$$

$$= \frac{\mathrm{(A+B)s^2 + (A+C)s + A}}{\mathrm{s(s^2+s+1)}}$$

e igualando o numerador $\mathrm{(B+A)s^2 + (C+A)s + A}$ com (s + 1), o numerador de X(s) em eq. (5.25), temos que:

$$\begin{cases} \mathrm{A+B=0} \\ \mathrm{A+C=1} \\ \mathrm{A=1} \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{cases} \mathrm{A=1} \\ \mathrm{B=-1} \\ \mathrm{C=0} \end{cases}$$

e portanto,

$$\mathrm{X(s)} = \frac{1}{\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{-s}}{\mathrm{s^2+s+1}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{s}} - \frac{\mathrm{(s+1/2)}}{\mathrm{(s+1/2)^2+(3/4)}} + \frac{1/2}{\mathrm{(s+1/2)^2+(3/4)}}$$

logo

$$\mathrm{x(t)} = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right] + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]$$

e usando a tabela da secção anterior facilmente encontramos:

$$x(t) = 1 - e^{-0.5t} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-0.5t} \cdot \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\,, \quad t > 0$$

$$= 1 - e^{-0.5t} \cdot (\cos 0.866t - 0.578\, e^{-0.5t} \operatorname{sen} 0.866t)\,, \qquad t > 0$$

□

Exemplo 5.21:

$$X(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} \qquad \text{eq. (5.26)}$$

Este é um caso de um pólo múltiplo (s = 1, triplo neste caso). Para achar a transformada inversa de Laplace de X(s) fazemos a expansão em fracções parciais:

$$X(s) = \frac{A}{(s+1)^3} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)}$$

$$= \frac{A + B(s+1) + C(s+1)^2}{(s+1)^3}$$

$$= \frac{(A+B+C) + (B+2C)s + Cs^2}{(s+1)^3}$$

e igualando o numerador $(A + B + C) + (B + 2C)s + Cs^2$ com o numerador de X(s) em eq. (5.26) temos que:

$$\begin{cases} A + B + C = 3 \\ B + 2C = 2 \\ C = 1 \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases}$$

e portanto,

$$X(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1}$$

$$= \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{s+1}$$

cuja transformada inversa é:

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

$$= (t^2+1)e^{-t} \;, \quad t > 0$$

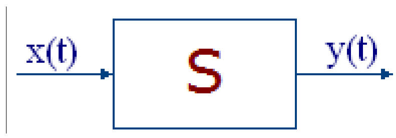
□

5.9 – Solução de equações diferenciais ordinárias (EDO) usando Transformada Laplace

As Transformadas de Laplace são muito úteis na resolução de equações diferenciais ordinárias (EDO) transformando-as em equações algébricas no domínio ‘s’ (também chamado “*domínio da frequência*”) de fácil solução. O principal problema deixa de ser as equações diferenciais e passa a ser a transformada inversa de Laplace.

As propriedades das derivadas para Transformada de Laplace [equações eq. (5.10) – eq. (5.11)] são as mais importantes para a resolução de EDO.

EDO descrevem a dinâmica de sistemas contínuos onde x(t) é a entrada (“*input*”) e y(t) é a saída (“*output*”).



Normalmente, a entrada x(t) é conhecida assim como as condições iniciais da saída y(t), isto é,

y(0), y’[0], y’’[0], etc.

e deseja-se calcular a saída y(t), a solução da EDO.

O número de condições iniciais necessárias para resolver a EDO é a ordem da própria equação de diferencial (que é a ordem do sistema). Logo, se for de 1ª ordem, precisa-se de y(0); se for de 2ª ordem, precisa-se de y(0) e y’(0), e assim por diante.

Exemplo 5.22:

Considere a equação diferencial ordinária (EDO) com $x(t) = u_1(t)$ = degrau unitário e condições iniciais nulas, isto é, $y(0)=0$ e $y'(0)=0$:

$$\begin{cases} y'' + 3y(t) = 2x(t) \\ y(0)=0 \quad \text{e} \quad y'(0)=0 \\ x(t) = u_1(t) = \text{degrau unitário} \end{cases} \qquad \text{eq. (5.27)}$$

Fazendo-se a Transformada de Laplace dos termos da eq. (5.27) obtém-se:

$$s^2 Y(s) + 3Y(s) = 2\,X(s)$$

ou seja,

$$(s^2+3)\,Y(s) = 2\,X(s)$$

e portanto,

$$Y(s) = \frac{2}{(s^2+3)}\,X(s) \qquad \text{eq. (5.28)}$$

e, como $x(t) = u_1(t)$ = degrau unitário, temos que $X(s) = 1/s$, logo:

$$(s^2+3)\,Y(s) = \frac{2}{s}$$

que é uma equação algébrica em 's' e cuja solução é:

$$Y(s) = \frac{2}{s\,(s^2+3)}$$

Agora a solução y(t) desta EDO é encontrada fazendo-se a transformada inversa de Laplace de Y(s).

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)]$$

Este é um caso de um pólo real (distinto) $s = 0$ e um par de pólos complexos, raízes de $(s^2+3) = 0$.

Para achar a transformada inversa de Laplace de Y(s) fazemos a expansão em fracções parciais:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 3}$$

$$= \frac{(A + B)s^2 + Cs + 3A}{s(s^2 + 3)}$$

e igualando o numerador $(A + B)s^2 + Cs + 3A$ com 2, o numerador de Y(s), temos que

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ 3A = 2 \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = -\frac{2}{3} \\ C = 0 \end{cases}$$

e portanto,

$$X(s) = \frac{2/3}{s} + \frac{-(2/3)s}{s^2 + 3}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{s} - \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{s}{(s^2 + 3)}$$

logo

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{s}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{s}{(s^2 + 3)}\right]$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2 + (\sqrt{3})^2\right)}\right]\right\}$$

e usando a tabela da secção 5.7 a solução da EDO é encontrada:

$$y(t) = \frac{2}{3}\left(1 - \cos\sqrt{3}\,t\right) \quad , \qquad t > 0$$

□

Exemplo 5.23:

Considere a equação diferencial ordinária (EDO) homogénea (ou seja, x(t) = 0, caso de sistemas livres, que não têm "*input*") e condições iniciais: y(0) = 0 e y'(0) = 4.

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 9y(t) = x(t) = 0 \\ y(0) = 0 \;\text{ e }\; y'(0) = 4; \;\; x(t) = 0 \end{cases} \qquad \text{eq. (5.29)}$$

Fazendo-se a Transformada de Laplace da eq. (5.29) termo a termo obtém-se:

$$s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 5sY(s) - 5y(0) + 9Y(s) = 0$$

logo,

$$s^2Y(s) - 4 + 5sY(s) + 9Y(s) = 0$$

e portanto,

$$(s^2 + 5s + 9)\; Y(s) = 4$$

que é uma equação algébrica em 's' e cuja solução é:

$$Y(s) = \frac{4}{(s^2 + 5s + 9)}$$

Agora a solução y(t) desta EDO é encontrada fazendo-se a transformada inversa de Laplace de Y(s).

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)]$$

Este é um caso de um par de pólos complexos, raízes de $(s^2 + 5s + 9) = 0$.

Para achar a transformada inversa de Laplace de Y(s) fazemos a expansão em fracções parciais:

$$Y(s) = \frac{4}{(s+2{,}5)^2 + 2{,}75} = \frac{(2{,}412)\cdot(1{,}658)}{(s+2{,}5)^2 + (1{,}658)^2}$$

logo

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[(2{,}412)\cdot\frac{(1{,}658)}{(s+2{,}5)^2 + (1{,}658)^2}\right]$$

$$= (2{,}412)\cdot\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(1{,}658)}{(s+2{,}5)^2 + (1{,}658)^2}\right]$$

e usando a tabela da secção 5.7, a solução da EDO é encontrada:

$$y(t) = 2{,}412 \cdot e^{-2{,}5t} \cdot \text{sen}\, 1{,}658\, t \quad , \qquad t > 0$$

□

Exemplo 5.24:

Considere a equação diferencial ordinária (EDO) abaixo onde x(t) = u_1(t) = degrau unitário, e as condições iniciais são: y(0) = 1 e y'(0) = 0.

$$\begin{cases} y'' + y' + y(t) = x(t) \\ y(0) = 1 \ \text{ e } \ y'(0) = 0; \ x(t) = u_1(t) \end{cases} \qquad \text{eq. (5.29a)}$$

Fazendo-se a Transformada de Laplace da eq. (5.29a) termo a termo obtém-se:

$$s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) + Y(s) = X(s)$$

logo,

$$s^2Y(s) - s + sY(s) - 1 + Y(s) = (1/s)$$

e portanto,

$$(s^2 + s + 1)\,Y(s) = \frac{s+1}{s}$$

que é uma equação algébrica em 's' e cuja solução é:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$$

que é a mesma equação eq. (5.26) já vista anteriormente no Exemplo 5.20. A solução y(t) desta EDO é a transformada inversa de Laplace de Y(s):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

já foi calculada no Exemplo 5.20 e é dada em eq. (5.26), ou seja,

$$y(t) = 1 - e^{-0.5t} \cdot (\cos 0.866t - 0.578\, e^{-0.5t} \text{sen} 0.866t) \, , \qquad t > 0$$

□

5.10 – **A resposta impulsional h(t) e H(s)**

Note que para acharmos a Transformada inversa de Y(s), na eq. (5.27), era necessário conhecer x(t), ou melhor, X(s).

Equações de diferenciais como as das eq. (5.27) ou eq. (5.29) descrevem a dinâmica de sistemas em que x(t) é a entrada, y(t) é a saída do sistema.

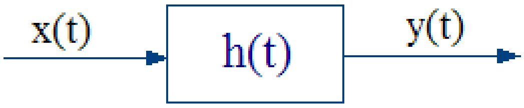


Fig. 5.17 – Diagrama de bloco esquemático de um sistema com entrada x(t), saída y(t) e *resposta impulsional* h(t).

Conforme visto no capítulo 4 (Sistemas), a *resposta impulsional* (“*impulse response*”) h(t) será a resposta y(t) de um sistema linear e invariante no tempo (SLIT) quando a entrada x(t) for um impulso $u_o(t)$, como ilustra a figura 5.18.

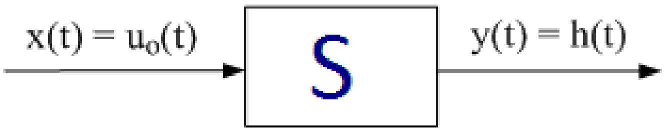


Fig. 5.18 – Diagrama de bloco esquemático da *resposta impulsional* h(t), a saída do sistema quando a entrada é o impulso $u_o(t)$.

Um resultado clássico da teoria de sistemas, que vimos na secção 4.3, é que a saída y(t) de um sistema é a convolução entre h(t) e x(t), ou seja

$$y(t) \ = \ h(t) * x(t)$$

isto é, a saída de um sistema linear invariante no tempo (SLIT) toma a forma da *integral de convolução*, eq. (4.5):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\cdot x(\tau)\cdot d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau \ .$$

Usando a propriedade da convolução para a Transformada de Laplace, eq. (5.12), ou seja, a transformada da convolução é o produto das transformadas, temos então que:

$$Y(s) = H(s)\cdot X(s) \qquad \text{eq. (5.30)}$$

o que permite redesenhar o diagrama acima da Fig. 5.17 na forma mostrada na Fig. 5.19.

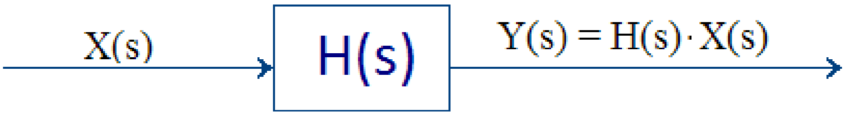


Fig. 5.19 – Diagrama de bloco esquemático de um sistema com entrada X(s), saída Y(s) e *resposta impulsional* H(s).

Como a Transformada de Laplace do impulso unitário $u_o(t)$ é igual a 1, ou seja:

$$\mathscr{L}\{u_o(t)\} = 1$$

conforme já visto, eq. (5.4), então quando a entrada x(t) é um impulso unitário $u_o(t)$, i.e.,

$$x(t) = u_o(t)$$

teremos que X(s) = 1 e portanto, pela eq. (5.30), Y(s) = H(s) × 1, isto é,

$$Y(s) = H(s),$$

o que implica

$$y(t) = h(t),$$

isto é, a saída y(t) se torna a *resposta impulsional*, como seria de se esperar.

Exemplo 5.25:

Retomando o sistema do Exemplo 5.22, se imaginarmos que a equação diferencial eq. (5.27) descreve a dinâmica de um sistema, então, comparando a eq. (5.28) com a eq. (5.30) obtemos

$$H(s) = \frac{2}{(s^2 + 3)}$$

Isto é consistente com a definição de h(t) e H(s) (*resposta impulsional do sistema*), pois se a entrada x(t) for o degrau unitário, como era no Exemplo 5.22,

$$x(t) = u_1(t)$$

então X(s) = 1/s e, pela eq. (5.30), temos que:

$$Y(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{s(s^2+3)}$$

ou seja, o mesmo Y(s) que foi obtido no Exemplo 5.22 e que permitiu calcular a saída do sistema y(t)

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)]$$

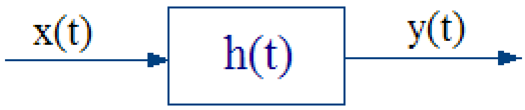


Fig. 5.20 – Sistema com entrada x(t), saída y(t) e *resposta impulsional* h(t).

Entretanto, se a entrada do sistema fosse

$$x(t) = u_o(t)$$

então X(s) = 1 e, pela eq. (5.30), temos que:

$$Y(s) = H(s) = \frac{2}{(s^2+3)}$$

ou seja, a saída y(t) = h(t), conforme a própria definição da *resposta impulsional* h(t). A expressão deste h(t) é então achada fazendo-se

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}[H(s)] = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)]$$

ou seja,

$$h(t) = y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s^2+3)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\left(s^2+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)}\right]$$

e agora, pela propriedade da homogeneidade da Transformada de Laplace e usando-se a tabela da secção 5.7, temos que a *resposta impulsional* é:

$$h(t) = y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}t), \quad t > 0$$

Observe que os pólos do sistema, raízes do polinómio q(s) do denominador de H(s),

$$q(s) = (s^2 + 3),$$

ou seja:

$$s = \pm\sqrt{3}.$$

□

Exemplo 5.26:

No caso do Exemplo 5.23, a equação diferencial eq. (5.29), que descreve a dinâmica deste sistema, é na verdade

$$y'' + 5y' + 9\, y(t) = x(t) \qquad \text{eq. (5.31)}$$

onde x(t) = 0 pois a entrada deste sistema é nula.

Agora, assumindo condições iniciais nulas, i.e., y(0) = 0 e y'(0) = 0, e fazendo a Transformada de Laplace da equação eq. (5.31) termo a termo, facilmente obtém-se:

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 9Y(s) = X(s)$$

o que nos fornece:

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 5s + 9)} \cdot X(s)$$

que, novamente, comparando com a equação eq. (5.30) nos dá:

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 5s + 9)}$$

a *resposta impulsional do sistema*.

Portanto, a *resposta impulsional* H(s) pode ser sempre obtida a partir da equação diferencial que descreve o sistema fazendo-se condições iniciais nulas. Além disso, os pólos do sistema são as raízes do polinómio

$$q(s) = s^2 + 5s + 9$$

que se encontra no denominador de H(s), que são:

$$s = -2{,}5 \pm 1{,}658\, j$$

Para se achar h(t) temos que calcular a Transformada inversa:

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}[H(s)]$$

Reescrevendo q(s) como

$$q(s) = s^2 + 5s + 9 = (s + 2{,}5)^2 + 2{,}75$$

e substituindo no denominador de H(s), temos

$$H(s) = \frac{1}{(s + 2{,}5)^2 + 2{,}75}$$

$$= \frac{(0{,}603) \cdot (1{,}658)}{(s + 2{,}5)^2 + (1{,}658)^2}$$

logo,

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[(0{,}603) \cdot \frac{(1{,}658)}{(s + 2{,}5)^2 + (1{,}658)^2}\right]$$

$$= (0{,}603) \cdot \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(1{,}658)}{(s + 2{,}5)^2 + (1{,}658)^2}\right]$$

e usando a tabela da secção 5.7, nos dá:

$$h(t) = 0{,}603 \cdot e^{-2{,}5t} \cdot \text{sen}\ 1{,}658\, t \quad , \qquad t > 0$$

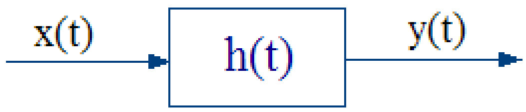


Fig. 5.21 – Sistema com entrada x(t), saída y(t) e *resposta impulsional* h(t).

□

Exemplo 5.27:

No caso do Exemplo 5.24, a equação diferencial eq. (5.29a), que descreve a dinâmica deste sistema, é

$$y'' + y' + y(t) = x(t) \qquad \text{eq. (5.32)}$$

Agora, assumindo condições iniciais nulas, i.e., y(0) = 0 e y'(0) = 0, e fazendo a Transformada de Laplace da equação eq. (5.31) termo a termo, facilmente obtém-se:

$$s^2Y(s) + sY(s) + Y(s) = X(s)$$

o que nos fornece:

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+s+1)} \cdot X(s)$$

que, novamente, comparando com a equação eq. (5.30) nos dá:

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+s+1)}$$

a *resposta impulsional do sistema*.

Mais uma vez a *resposta impulsional* H(s) foi obtida a partir da EDO que descreve o sistema fazendo-se condições iniciais nulas. Os pólos deste sistema são as raízes do polinómio

$$q(s) = s^2+s+1$$

que se encontra no denominador de H(s), que são:

$$s = -0{,}5 \pm 0{,}866\, j$$

Para se achar h(t) temos que calcular a Transformada inversa:

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}[H(s)]$$

Reescrevendo q(s) como

$$q(s) = s^2+s+1 = (s+0{,}5)^2 + (0{,}866)^2$$

e substituindo no denominador de H(s), temos

$$H(s) = \frac{1}{(s+0{,}5)^2+(0{,}866)^2}$$

logo,

$$h(t) = (1{,}1547)\cdot \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(0{,}866)}{(s+0{,}5)^2+(0{,}866)^2}\right]$$

e usando a tabela da secção 5.7, nos dá:

$$h(t) = 1{,}1547 \cdot e^{-0{,}5t} \cdot \text{sen}\, 0{,}866\, t \quad , \qquad t > 0$$

□