

Introdução

A combinação das ações proporcional, integral e derivativa dá origem ao que chamamos de *controlador proporcional-integral-derivativo* ou simplesmente *PID*. O objetivo é aproveitar as características particulares de cada uma destas ações a fim de se obter uma melhora significativa do comportamento transitório e em regime permanente do sistema controlado. O sinal de controle gerado pelo controlador PID é assim genericamente dado como:

$$u(t) = K(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt}) \quad (3.1)$$

Desta forma tem-se três parâmetros de sintonia no controlador: o ganho proporcional K (ação proporcional), o tempo integral T_i (ação integral) e o tempo derivativo T_d (ação derivativa).

Apesar de termos a disponibilidade das três ações básicas, dependendo da aplicação não será necessária a utilização de uma ou mais destas ações. Por exemplo, em uma planta do tipo 1 (i.e. apresentando um pólo na origem) a utilização da ação integral não se fará necessária se o objetivo de controle for o de seguir, com erro nulo, um sinal de referência constante. Basicamente temos 4 configurações possíveis de controladores a partir de uma estrutura PID:

1. proporcional (P)
2. proporcional-integral (PI)
3. proporcional-derivativo (PD)
4. proporcional-integral-derivativo (PID)

A Banda Proporcional

Na prática, por restrições de ordem física ou de segurança, não é possível a aplicação de sinais controle de amplitudes ilimitadas. Tem-se assim um limite máximo u_{max} e um limite mínimo u_{min} para a variável de controle.

O sinal de controle dado por (3.1) pode ser re-escrito genericamente como:

$$u(t) = K f(e(t)) = Kw(t)$$

Considerando-se os limites do controle, tem-se que o sinal que será efetivamente aplicado é descrito da seguinte forma:

$$u(t) = \begin{cases} u_{max} & \text{se } w(t) > u_{max} \\ Kw(t) & \text{se } u_{min} \leq w(t) \leq u_{max} \\ u_{min} & \text{se } w(t) < u_{min} \end{cases}$$

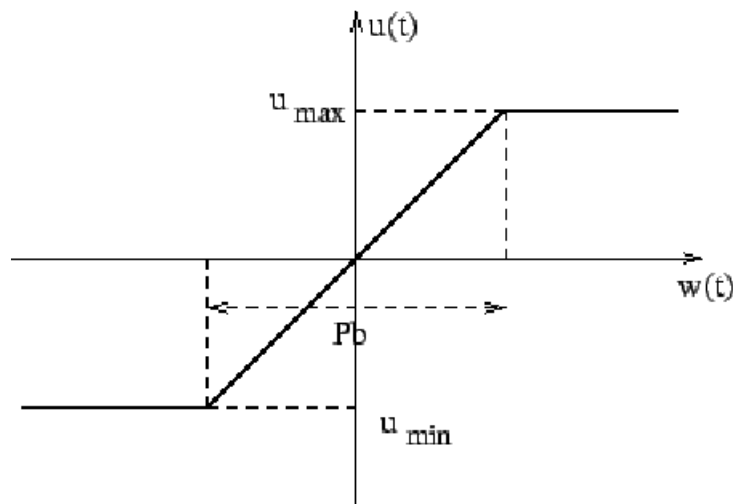
Assim, se $Kw(t) > u_{max}$ ou se $Kw(t) < u_{min}$ diz-se que há *saturação de controle*. Neste caso o comportamento do controlador torna-se *não linear*. Para que o comportamento do controlador PID seja dado exatamente por (3.1), ou seja *linear*, o sinal $w(t)$ deve pertencer ao intervalo $[w_1, w_2]$ onde $w_1 = u_{min}/K$ e $w_2 = u_{max}/K$. A largura do intervalo $[w_1, w_2]$ é o que chamamos de *banda proporcional*, P_b :

$$P_b = w_2 - w_1$$

A partir desta definição podemos escrever que:

$$u_{max} - u_{min} = KP_b$$

Em resumo: quanto maior a banda proporcional, mais dificilmente ocorrerá saturação de controle, ou seja, maior é a região de comportamento linear para o controlador PID. A figura (3.1) ilustra graficamente a banda proporcional.



O Controlador Proporcional (P)

Muitas vezes, processos simples podem ser controlados satisfatoriamente apenas com a ação proporcional. Neste caso as ações integral e derivativa são simplesmente desligadas. Tem-se:

$$u(t) = K(e(t))$$

Em muitos controladores PID industriais, ao invés de especificarmos diretamente o valor de K , especifica-se o valor da banda proporcional em valor percentual. Note que, considerando-se $u_{max} - u_{min} = 100\%$, tem-se:

$$K = \frac{100}{P_b}$$

Logicamente, quanto maior o valor de K menor é a banda proporcional. Quanto maior o ganho menor será o valor do erro em regime permanente, mas este erro nunca será completamente anulado.

O controlador Proporcional-Integral (PI)

A principal função da ação integral é fazer com que processos do tipo 0 sigam, com erro nulo, um sinal de referência do tipo salto. Entretanto, a ação integral se aplicada isoladamente tende a piorar a estabilidade relativa do sistema. Para contrabalançar este fato, a ação integral é em geral utilizada em conjunto com a ação proporcional constituindo-se o controlador PI, cujo sinal de controle é dado por:

$$u(t) = K(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau)) \tag{3.2}$$

O gráfico da figura (3.2) ilustra a aplicação da ação integral conjuntamente com a ação proporcional. A partir deste gráfico podemos dar uma interpretação para T_i : o tempo integral ou reset-time, corresponde ao tempo em que a parcela relativa a parte proporcional da ação de controle é duplicada. T_i é comumente especificado em *minutos*.

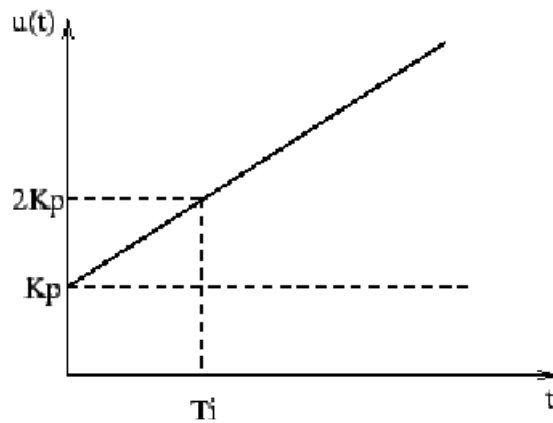


Figure 3.2: efeito da ação integral

Aplicando-se a transformada de Laplace tem-se a seguinte função de transferência para o controlador PI:

$$G_{pi}(s) = \frac{u(s)}{r(s)} = \frac{K(s + 1/T_i)}{s}$$

Note que tem-se um zero em $-1/T_i$ que tende a compensar o efeito desestabilizador do pólo na origem.

Na figura (3.3) é ilustrada a influência da sintonia do parâmetro T_i na resposta do sistema considerando-se o mesmo sistema simulado na página com constante. Para altos valores de T_i tem-se a predominância da ação proporcional, sendo que corresponde ao controlador proporcional. Note que, neste caso, existe um erro em regime permanente. A medida que diminuimos T_i a ação integral começa a predominar sobre a ação proporcional e $T_i = \infty$ a resposta tende a se aproximar mais rapidamente da referência, ou seja, o erro em regime tende a ser anulado mais rapidamente. Diminuindo-se excessivamente T_i observa-se que a resposta começa a ficar mais oscilatória numa tendência de instabilização. Isto se justifica pelo fato de que, neste caso, o zero do controlador começa a se afastar demasiadamente do pólo na origem e o controlador tende a comportar-se como um integrador puro.

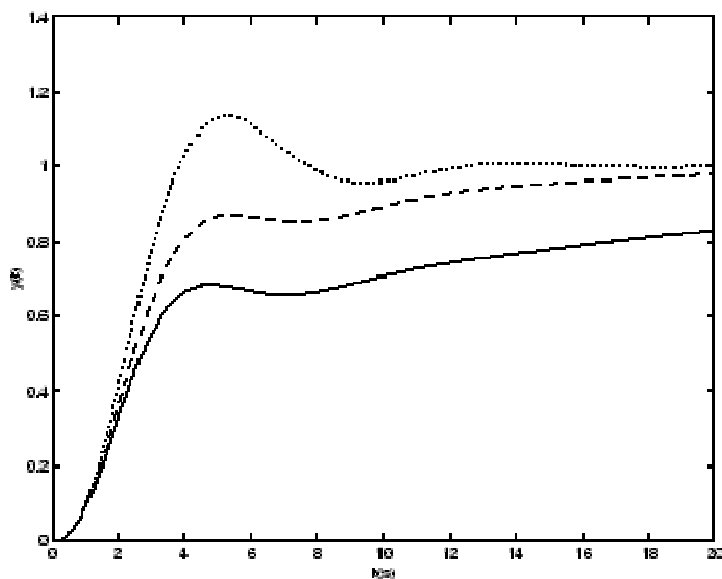


Figure 3.3: PI - K=1; Ti=2(pontilhado),4(tracejado),10(contínuo)

O Controlador Proporcional-Derivativo (PD)

A saída de um processo apresenta, intuitivamente, uma certa "inércia" com relação a modificações na variável de entrada. Esta "inércia" explica-se pela dinâmica do processo que faz com que uma mudança na variável de controle provoque uma mudança considerável na saída da planta somente após um certo tempo. Uma outra interpretação é que, dependendo da dinâmica do processo, o sinal de controle estará em "atraso" para corrigir o erro. Este fato é responsável por transitórios com grande amplitude e período de oscilação, podendo, em um caso extremo, gerar respostas instáveis.

A ação derivativa quando combinada com a ação proporcional tem justamente a função de "antecipar" a ação de controle a fim de que o processo reaja mais rápido. Neste caso, o sinal de controle a ser aplicado é proporcional a uma *predição* da saída do processo.

A estrutura básica do controlador PD é dada por:

$$u(t) = K(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}) \quad (3.3)$$

Considerando-se que $e(t + T_d)$ pode ser aproximado por

$$e(t + T_d) \approx e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}$$

tem-se que $u(t) \approx Ke(t + T_d)$, ou seja, o sinal de controle é proporcional à estimativa do erro de controle T_d unidades de tempo à frente. Em outras palavras, a predição é feita extrapolando o valor do erro pela reta tangente a curva do erro no instante t (vide figura (3.4)).

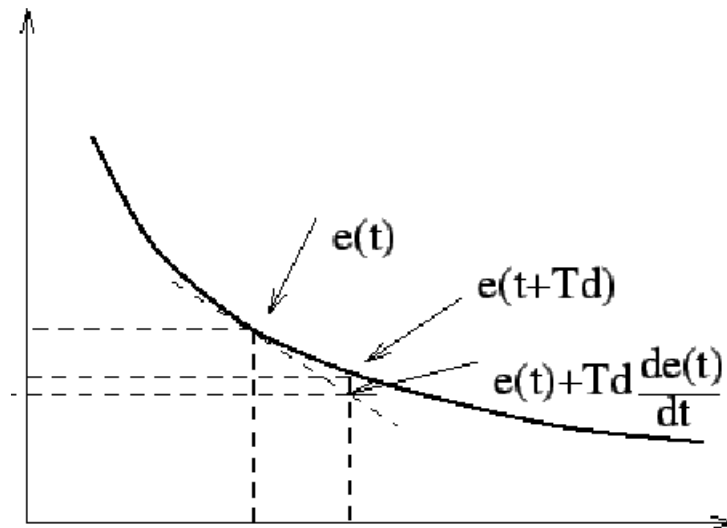


Figure 3.4: interpretação da ação proporcional-derivativa

Esta ação preditiva tende a aumentar a estabilidade relativa do sistema e a tornar a resposta transitória do mesmo mais rápida.

Na prática, conforme discutido na seção 2.5, deve-se limitar o ganho da parte derivativa em altas-freqüências através do acréscimo de um pólo p . A função de transferência do controlado PD é dada então por:

$$G_{pd} = \frac{u(s)}{r(s)} = K \left(1 + \frac{spT_d}{s+p} \right) = \frac{K(1 + T_dp)(s + \frac{p}{1+pT_d})}{(s+p)}$$

Observe que o zero do controlador PD está sempre à direita do pólo. Esta configuração é equivalente à de um compensador de avanço de fase. Note também que ao aumentarmos T_d , o zero do controlador tende a origem, significando a predominância da ação derivativa.

O Controlador Proporcional-Integral-Derivativo

O controlador proporcional combina as vantagens do controlador PI e PD. A ação integral está diretamente ligada à precisão do sistema sendo responsável pelo erro nulo em regime permanente. O efeito destabilizador do controlador PI é contrabalançado pela ação derivativa que tende a aumentar a estabilidade relativa do sistema ao mesmo tempo em que torna a resposta do sistema mais rápida devido ao seu efeito antecipatório.

Considerando-se o mesmo sistema da figura (3.3) e fixando-se $K = 1$ e $T_i = 2$, a influência da ação derivativa na resposta do sistema pode ser observada na figura (3.5).

A função de transferência do controlador PID é dada por:

$$G_{pid} = \frac{u(s)}{r(s)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{spT_d}{s+p} \right) = \frac{K(s^2 + \frac{1+T_d T_i}{T_i} s + \frac{p+T_i p}{T_i})}{s(s+p)} \quad (3.4)$$

É importante ressaltar que a equação (3.1) e a função de transferência (3.4) constituem-se na versão clássica do controlador PID. Outras versões e variações existem, mas a filosofia de funcionamento, a partir da combinação dos efeitos das três ações básicas, é a mesma.

A figura (3.5) mostra o efeito da ação derivativa considerando-se um controlador PID para o mesmo sistema das simulações mostradas nas figuras (2.4) e (3.3)

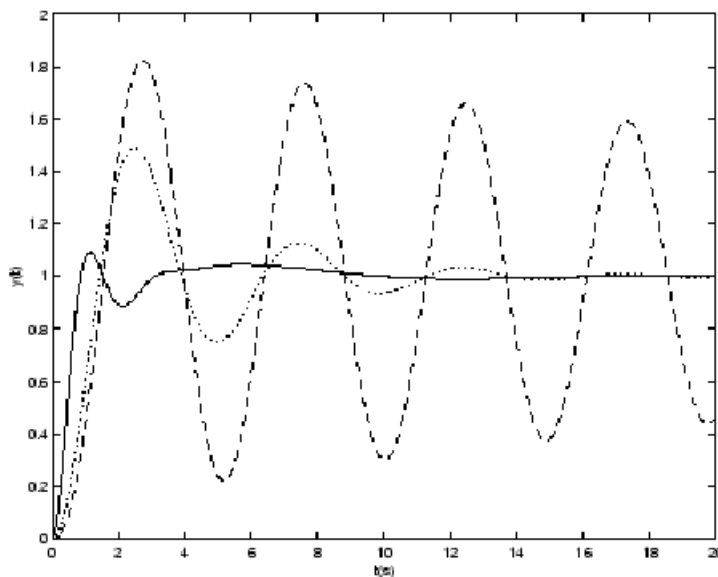


Figure 3.5: PID - $K_p=4$; $T_i=1.5$; $T_d=0.1$ (tracejado), 0.4 (pontilhado), 2 (contínuo)

Wind-up da ação integral

Conforme discutido anteriormente, na prática todos os atuadores apresentam limites. Quando o valor da variável de controle atinge o limite máximo (ou mínimo) do atuador ocorre à saturação do sinal de controle. Este fato faz com que a malha de realimentação seja de certa forma quebrada, pois o atuador permanecerá no seu limite máximo (ou mínimo) independentemente da saída do processo. Entretanto, se um controlador com ação integral é utilizado, o erro continuará a ser integrado e o termo integral tende a se tornar muito grande, ou seja, tende a "carregar-se" demasiadamente. Do inglês, diz-se que o termo integral "winds-up". Neste caso, para que o controlador volte a trabalhar na região linear (saia da saturação) é necessário que o termo integral se "descarregue". Para tanto deve-se esperar que o sinal de erro troque de sinal e, por um longo período de tempo, aplicar na entrada do controlador, um sinal de erro de sinal oposto. A consequência disto é que a resposta transitória do sistema tenderá a ficar lenta e oscilatória, característica esta extremamente indesejável em um processo industrial.

Existem várias maneiras de se evitar o *wind-up* da ação integral. A seguir apresentaremos dois métodos de *anti wind-up*. A idéia básica é impedir que o integrador continue a se carregar quando a saturação ocorre.

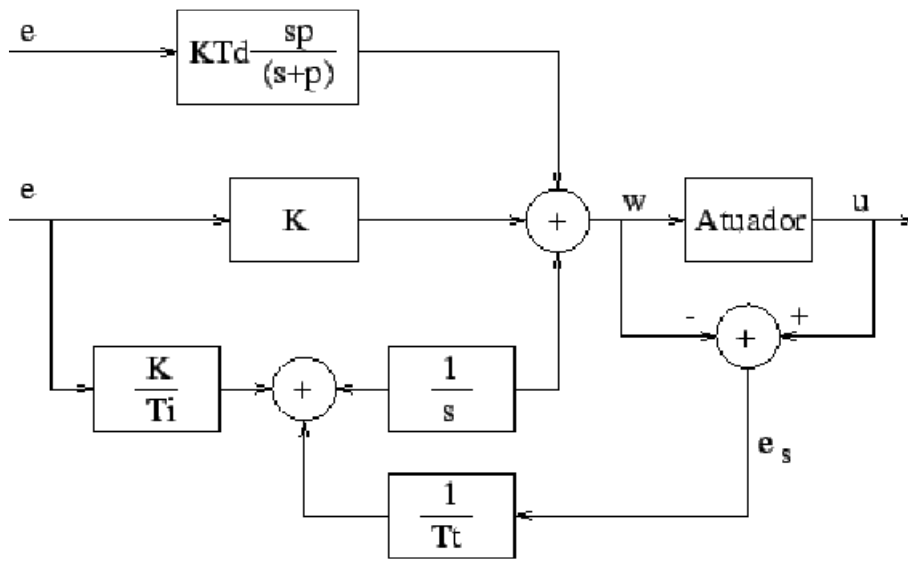


Figure 3.6: anti wind-up: back calculation and tracking

Back-Calculation and Tracking

A back-calculation funciona da maneira seguinte: quando a saída do atuador satura, o termo integral é re-calculado de forma que seu valor permaneça no valor limite do atuador. É vantajoso fazer esta correção não instantaneamente, mas dinamicamente com uma constante de tempo T_t .

A figura (3.6) mostra o diagrama em blocos de um controlador PID com anti wind-up do tipo back calculation. O sistema apresenta um laço de realimentação adicional. A diferença entre o valor da entrada e da saída do atuador constituem um erro e_s que é realimentado à entrada do integrador com um ganho $1/T_t$. Note que quando não há saturação o erro e_s é igual a zero e, portanto, este laço não tem nenhum efeito quando o controlador está operando linearmente, ou seja, quando sua saída não está saturada. Quando ocorre a saturação e_s será diferente de zero e o sinal aplicado na entrada do integrador não mais será eK/T_i , mas

sendo que, em regime permanente, teremos que:

$$e_s = -\frac{KT_t}{T_i} e$$

ou seja, a entrada do integrador será igual a zero prevenindo assim que o mesmo se carregue demasiadamente. O tempo para que a entrada do integrador chegue a zero é determinado pelo ganho $1/T_t$, onde T_t pode ser interpretado como a constante de tempo que determina o quão rápido a entrada do integrador será levada a zero. Assim, a escolha de valores bem pequenos para T_t pode parecer vantajosa à primeira vista. Entretanto, deve-se ter cuidado na escolha de T_t

especialmente em sistemas com ação derivativa. O que pode acontecer é que ruídos espúrios podem levar a saída do controlador a saturação provocando a atuação muito rápida da malha de anti wind-up e levando a entrada do integrador indesejavelmente a zero. Na prática deve-se ter T_t maior que T_d e menor que T_i . Uma regra empírica sugerida é a

escolha de

$$T_t = \sqrt{T_i T_d}$$

Na figura (3.7) mostrado a resposta ao salto unitário de um sistema controlado por um PI sem e com a compensação de wind-up. Note que o sistema sem o esquema de anti-Wind up apresenta um maior sobressalto e um maior tempo de estabilização.

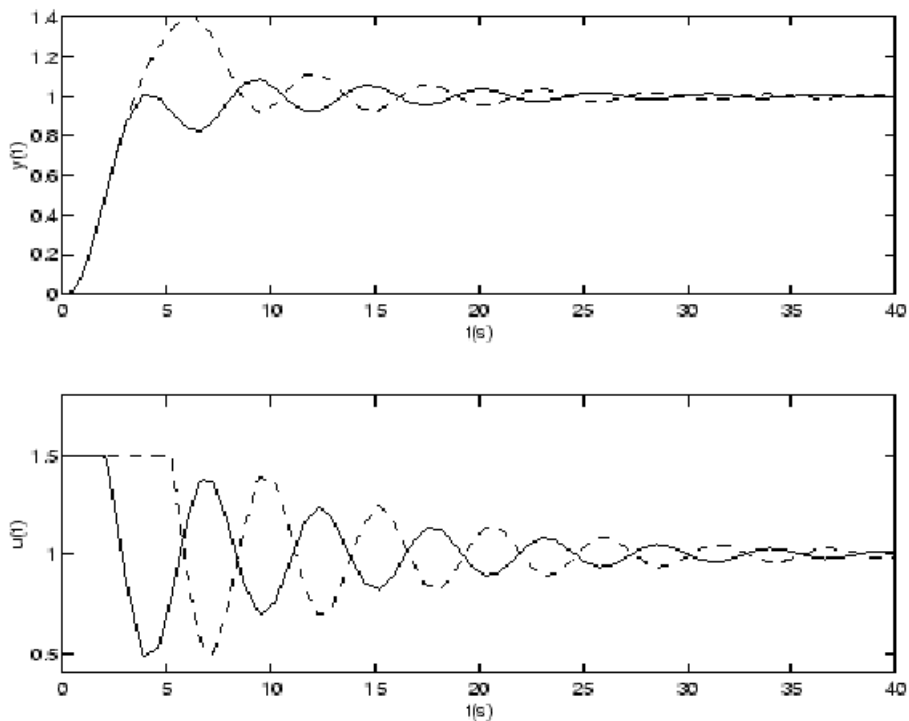


Figure 3.7: anti-windup: sem (tracejado); com (linha contínua)

Integração Condicional

Este método de anti Wind-up consiste em desligar a ação integral quando o controle está longe do regime permanente. A ação integral é assim ativada apenas quando certas condições pré-estabelecidas são satisfeitas, caso contrário o termo integral é mantido constante, ou seja, a entrada do integrador é mantida em zero.

As condições para a integração ser inibida podem ser definidas de várias maneiras. Uma forma é desligar o integrador enquanto o sinal de erro $e(t)$ for grande. Outra maneira é desligar o integrador somente durante a saturação. A

desvantagem destas duas estratégias é que o valor do termo integral poderá ficar bloqueado em um valor muito alto enquanto o integrador permanecer desligado.

Para evitarmos este tipo de problema uma terceira estratégia pode ser implementada. A idéia consiste em desligar o integrador somente quando *o controlador está saturado e o erro $e(t)$ é tal que provocaria um aumento da carga do integrador fazendo com que o sinal de controle ficasse mais saturado*. Assim, por exemplo, se o controlador está saturado no limite máximo a ação seria desligada somente enquanto $e(t)$ fosse positivo. Entretanto, quando o sinal de erro se tornasse negativo a ação integral voltaria a ser ligada com o intuito de descarregar o integrador.

Implementação Analógica

A implementação analógica de um PID pode ser feita através do seguinte circuito eletrônico (figura (3.8) construído a partir de amplificadores operacionais. O circuito constitui-se basicamente de um estágio amplificador (ação proporcional), um estágio onde são implementadas as funções de integração e derivação (ações integral e derivativa) e um estágio final onde estas ações são somadas. Outras topologias de circuito implementando a ação PID podem ser encontradas na literatura.

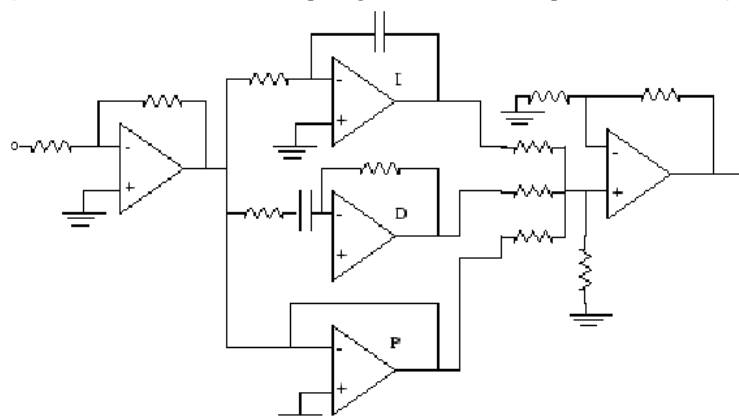


Figure 3.8: PID analógico

Outras topologias de circuito implementando a ação PID podem ser encontradas na literatura.

Implementação Digital

A implementação do controlador PID pode ser feita fazendo-se aproximações numéricas das derivadas e da integral que aparecem na lei de controle. Desta forma, é possível descrever cada uma das ações por uma *equação de recorrência*. As equações de recorrência descrevem as operações matemáticas a serem programadas no microcontrolador ou no microcomputador onde será implementado o PID digital.

Consideremos que o período de amostragem T foi convenientemente escolhido de forma a satisfazer o Teorema da Amostragem. O sinal de controle será atualizado apenas nos instantes de tempo $t_k = kT$, ou simplesmente

denotaremos a saída do processo, o sinal de referência, o sinal de controle e o erro no instante t_k respectivamente como $y(k)$, $r(k)$, $u(k)$ e $e(k)$.

Ação Proporcional

O termo proporcional discretizado a ser aplicado no instante k é dado por:

$$P(k) = K(r(k-1) - y(k-1)) = K(e(k-1))$$

Ação Integral

A ação integral é dada por:

$$I(t) = \frac{K}{T_i} \int_0^t e(s) ds$$

ou equivalentemente por:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{K}{T_i} e \quad (3.5)$$

Existem várias maneiras de discretizar, ou seja, aproximar numericamente a equação (3.5). Abaixo apresentamos dois métodos

Backward Differences:

Neste caso temos a seguinte aproximação para a equação (3.5):

$$\frac{I(k) - I(k-1)}{T} = \frac{K}{T_i} e(k)$$

a qual é equivalente a seguinte equação de recorrência:

$$I(k+1) = I(k) + \frac{K}{T_i} e(k)$$

Aproximação de Tustin

A aproximação de Tustin, também conhecida como *transformação bilinear*, nos dá a seguinte equação de recorrência:

$$I(k+1) = I(k) + \frac{KT}{T_i} \frac{e(k+1) + e(k)}{2}$$

Observe que a equação (3.9.2) é equivalente a uma integração numérica utilizando o *método dos trapézios*.

Ação Derivativa

O termo derivativo pode ser re-escrito da seguinte maneira:

$$\frac{dD}{dt} + Dp = -KT_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.6)$$

Da mesma forma que o termo integral, a equação (3.6) pode ser discretizado segundo vários métodos. Apresentamos abaixo a discretização da ação derivativa utilizando a aproximação por backward differences e a aproximação de Tustin.

Backward Differences:

$$\frac{D(k) - D(k-1)}{T} + pD(k) = -KT_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

A equação de recorrência é neste caso:

$$D(k) = \frac{1}{1+pT} D(k-1) - \frac{KT_d T}{1+pT} (e(k) - e(k-1))$$

Aproximação de Tustin:

Pela aproximação de Tustin temos a seguinte equação de recorrência:

$$D(k) = \frac{(pT-2)}{(pT+2)} D(k-1) + \frac{2KT_d}{T(pT+2)} (e(k) - e(k-1))$$

Rotina PID

A partir do apresentado acima, a rotina para a implementação digital do algoritmo de controle PID, pode ser escrita a partir das equações de recorrência de cada uma das ações. Um exemplo de código básico seria o seguinte:

```
P= K*erro
I=I_ant+ {K*T}*{2*T_i}*(erro+erro_ant)/{(2*T_i)}
D=(pT-2)/(pT+2)*D_ant + 2*K*T_d*T*(pT+2)*(erro-erro_ant)
sinal_controle = P + I + D
erro_ant=erro
D_ant = D
```

Métodos de Ajuste

Vários métodos de ajuste de controladores PID são conhecidos e utilizados na prática de sistemas de controle. Cada um destes métodos requer algum tipo de informação sobre a dinâmica do processo a ser controlado e a natureza desta informação é que caracteriza cada um destes métodos. A fim de obter um método prático de ajuste, deve ser possível obter estas informações a partir de ensaios simples sobre o processo, ao mesmo tempo em que estas informações devem ser suficientes para possibilitar um ajuste adequado do controlador. Logo, a quantidade adequada de informação a ser obtida do processo deve ser selecionada de forma a obter um compromisso entre simplicidade e desempenho do controlador.

Os métodos mais bem sucedidos na prática industrial de ajuste de controladores PID são apresentados a seguir. O sucesso destes métodos deve-se essencialmente ao fato de que eles obtêm um compromisso adequado entre desempenho e simplicidade. São apresentados os métodos de Ziegler-Nichols com suas variações mais modernas [2,1], o ajuste pela

alocação dos pólos dominantes, e o ajuste por método freqüencial. São apresentadas as principais características de cada método, suas vantagens e desvantagens relativas e os campos de aplicação de cada um.

Métodos de Ziegler-Nichols

Os métodos de Ziegler-Nichols foram introduzidos já em 1942 e hoje são considerados clássicos. Estes métodos continuam a ser largamente aplicados até hoje, mesmo em sua forma original, mas mais costumeiramente em alguma forma modificada. Os dois métodos básicos de ajuste de Ziegler-Nichols visam obter uma mesma resposta pré-especificada para o sistema em malha fechada, e diferem no que diz respeito à natureza da informação sobre a dinâmica do processo que é exigida por cada um deles.

O *método da resposta ao salto*, ou método do domínio do tempo, requer o conhecimento de duas grandezas que caracterizam a resposta ao salto de um processo. Já o *método da realimentação por relé*, ou método do período crítico, exige o conhecimento de duas grandezas características da resposta em freqüência do processo. Uma vez obtidas estas informações, basta recorrer a fórmulas extremamente simples para calcular os ganhos do controlador. Estas fórmulas foram determinadas de maneira empírica por meio de ensaios de processos industriais típicos. As fórmulas originalmente propostas por Ziegler e Nichols fornecem uma resposta que foi posteriormente considerada insatisfatória. Diferentes fórmulas foram então propostas com base nos mesmos ensaios, obtendo-se melhor desempenho.

Método da Resposta ao Salto

A resposta típica de um processo industrial a um salto *unitário* na sua entrada é apresentada na Figura [4.1.4.1](#).

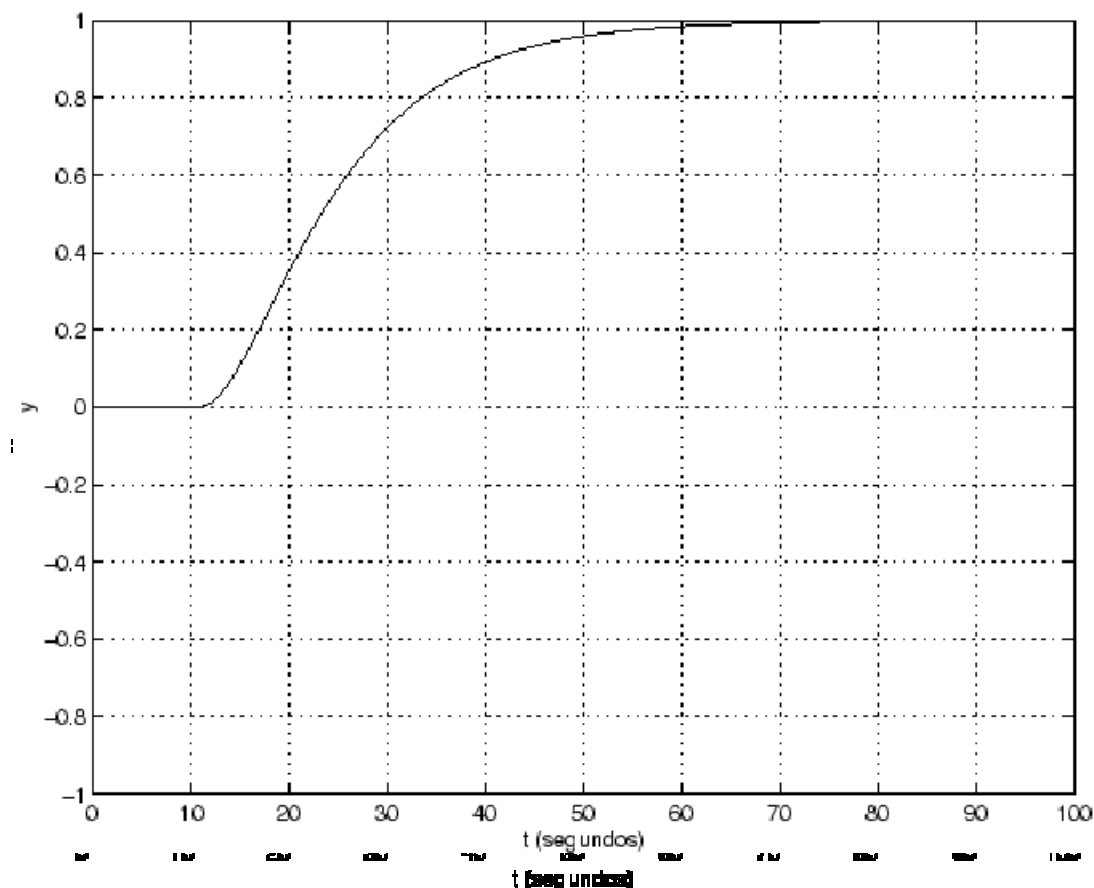


Figure 4.1: Características da resposta ao salto do processo relevantes para o ajuste de Ziegler-Nichols.

Esta resposta pode ser caracterizada por dois parâmetros: o *atraso aparente* L e o *ganho integral equivalente* a . Estes parâmetros são obtidos traçando uma reta tangente à curva de resposta no seu ponto de inflexão, ou seja, o ponto em que a taxa de variação da resposta é máxima. Os parâmetros são dados então pela interseção desta reta com os eixos coordenados, conforme indicado na Figura. Um salto de amplitude diferente da unidade pode ser usado, sendo neste caso necessário normalizar o ganho integral equivalente dividindo-o pela amplitude deste salto.

Note que

$$L = t_d - \frac{y_d}{d}$$

$$a = Ld = dt_d - y_d$$

onde d é o máximo valor da taxa de variação da saída, t_d é o instante de tempo em que este valor é observado e y_d é o valor da saída neste instante.

Ziegler e Nichols propuseram as seguintes fórmulas para cálculo dos parâmetros do controlador a partir dos parâmetros (a e L):

Table 4.1: Tabela de Ziegler e Nicholson pelo método da resposta ao salto.

Tipo de controlador	K	T_i	T_d
P	$\frac{1}{a}$	--	--
PI	$\frac{0,9}{a}$	$3L$	--
PID	$\frac{1,2}{a}$	$2L$	$\frac{L}{2}$

Os valores nesta Tabela foram determinados de forma empírica de forma a obter uma resposta com amortecimento de 1/4 na resposta à referência para processos industriais típicos. Enquanto a rejeição a perturbações muitas vezes apresenta um comportamento satisfatório, este amortecimento usualmente não é satisfatório na resposta à referência, causando em muitos casos uma sobrepassagem excessiva e baixa tolerância a variações na dinâmica do processo. Em função destas características, outras fórmulas foram propostas e diversas modificações sobre o método são utilizadas [2]. A Tabela 4.2 apresenta fórmulas que proporcionam uma resposta mais adequada.

Table 4.2: Tabela de Chien para ajuste pelo método da resposta ao salto.

Overshoot		0%			20%		
Tipo de controlador	K	T_i	T_d		K	T_i	T_d
P	$\frac{0,3}{a}$	--	--		$\frac{0,7}{a}$	--	--
PI	$\frac{0,35}{a}$	$1, 2T$	--		$\frac{0,6}{a}$	T	--
PID	$\frac{0,6}{a}$	T	$0, 5L$		$\frac{0,95}{a}$	$1,4T$	$0, 47L$

O método da resposta ao salto consiste portanto dos seguintes passos:

1. registrar a resposta ao salto do processo;
2. encontrar o instante de tempo em que a taxa de variação da saída atinge o seu valor máximo;
3. anotar o valor da saída e de sua taxa de variação neste instante de tempo;
4. calcular o atraso aparente e o ganho integral equivalente como em (4.1)-(4.1);
5. consultar a Tabela 4.1 ou 4.2.

Está claro que este método limita-se a plantas cuja resposta pode ser razoavelmente aproximada pela forma da Figura 4.1. Sistemas tipicamente oscilatórios, por exemplo, não se enquadram nesta categoria. Por outro lado, método baseia-se em identificação de formas de onda, o que pode ser problemático na prática, particularmente em aplicações com baixa

relação sinal-ruído. Ainda assim, o método é adequado para grande número de processos industriais.

Método do Período Crítico

Se um processo é colocado em laço fechado com controle proporcional e o valor do ganho proporcional é aumentado progressivamente, a certa altura o processo iniciará a oscilar. O ganho necessário para causar esta oscilação é chamado *ganho crítico* do processo e o período da oscilação observada é dito o seu *período crítico*. Evidentemente estes parâmetros podem ser determinados pelo ensaio em malha fechada com ganho proporcional, porém este procedimento é pouco eficiente por diversos motivos. Primeiramente, uma vez que o ganho deve ser aumentado de forma gradativa, o procedimento torna-se bastante demorado. Em segundo lugar, é preciso ter de antemão alguma informação sobre a dinâmica do processo a fim de determinar o valor inicial do ganho e sua taxa de variação. Finalmente, a natureza linear da oscilação faz com que ela nunca seja sustentada, mas sempre amortecida ou instável.

Uma maneira muito mais eficiente de determinar estes parâmetros é o ensaio de realimentação com relé, que não sofre de nenhum dos problemas citados acima. Imagine que o processo esteja em laço fechado com um relé na realimentação, como na Figura 2.1. A saída do relé oscila entre dois valores, e o valor médio é aquele necessário para fazer com que a saída seja igual à referência. O sistema de identificação está mostrado na Figura 2.1, enquanto que a Figura 2.3 apresenta a resposta do sistema nesta configuração.

O período desta oscilação é o chamado período crítico do processo T_u . O outro parâmetro a ser determinado é o ganho crítico K_u , que recebe este nome por ser o ganho necessário para levar o sistema à instabilidade quando sob controle proporcional. Pelo método da função descritiva [3] pode-se demonstrar que o ganho crítico é inversamente proporcional à amplitude da oscilação provocada pela realimentação com relé:

$$K_u = \frac{\pi}{d} A$$

onde A é a amplitude da oscilação observada.

Como o processo deve ser mantido próximo do seu ponto de operação, o sistema do relé deverá somar à saída do relé o valor da tendência (bias) que a saída do PID apresentava antes do início do teste. O valor do "bias" será o valor médio da saída do PID antes do início valor deve ser recalculado do teste. Caso este valor não seja adequado, o sistema não oscilará, ou oscilará de forma assimétrica. Neste caso, o valor de "bias" deve ser recalculado. Ademais, é conveniente fazer com que a saída do relé varie seguindo uma rampa nos primeiros momentos do ensaio, até atingir a amplitude desejada, como medida de prevenção contra possíveis oscilações excessivamente grandes.

De posse do ganho crítico e do período crítico basta aplicar as fórmulas propostas. A Tabela 4.3 apresenta as fórmulas originalmente apresentadas por Ziegler e Nichols quando da proposta do método.

Table 4.3: Fórmulas de Ziegler e Nichols para ajuste pelo método do período crítico.

Tipo de controlador	K	T_i	T_d
P	$0,5K_u$	--	--
PI	$0,4K_u$	$0,8T_u$	--
PID	$0,6K_u$	$0,5T_u$	$0,125T_u$

O método de ajuste do *período crítico* consiste portanto dos seguintes passos:

1. colocar o sistema em laço fechado com controle liga-desliga, de forma a provocar uma oscilação na saída do processo;
2. anotar a amplitude e a frequência da oscilação resultante;
3. calcular o *ganho crítico* como em (4.1);
4. consultar a Tabela 4.3 ou outra Tabela similar.

Na prática o relé deve ser dotado de histerese, a fim de evitar chaveamento devido ao ruído. Este método pode ser diretamente aplicado a uma classe de sistemas para os quais o método da resposta ao salto não é adequado. Ademais este método é menos sensível à presença de ruído do que o método da resposta ao salto. No entanto, para sistemas demasiadamente simples o método fica prejudicado, pois neste caso as características da oscilação - amplitude e

freqüência - são univocamente determinadas pelas características do relé, independentemente das características do processo.

Embora forneçam um desempenho ligeiramente superior àquele obtido com as fórmulas de Ziegler Nichols da resposta ao salto, estas fórmulas também não são satisfatórias em muitos casos. Um melhor ajuste pode ser obtido com o auxílio de uma informação adicional: o ganho estático do processo. O ganho estático do processo, caso não seja conhecido de outros ensaios, pode ser obtido por meio de um ensaio adicional, aplicando uma mudança de referência de pequena amplitude com o sistema em laço fechado. De posse desta informação os ganhos obtidos pelas fórmulas de Ziegler-Nichols são então modificados de acordo com as fórmulas

$$(4.1)$$

$$(4.2)$$

$$(4.3)$$

onde o subscrito **ZN** indica os ganhos calculados anteriormente pelo método de Ziegler-Nichols e os parâmetros α , β e γ são obtidos dos gráficos da figura 4.2.

O método modificado do período crítico consiste portanto dos seguintes passos:

1. aplicar o método do período crítico;
2. colocar o processo em laço fechado com controle PID, com os parâmetros calculados anteriormente;
3. aplicar um salto na referência e aguardar a saída atingir regime permanente;
4. calcular o ganho estático do processo;
5. consultar o gráfico 4.2, obtendo os parâmetros α , β e γ ;
6. recalculer os ganhos do PID de acordo com (4.2), (4.3), (4.4).

Figure 4.2:
Parâmetros de ajuste para o método de Ziegler-Nichols modificado.

Métodos Analíticos

As fórmulas de ajuste são adequadas para muitas situações práticas porém não se pode esperar resolver todos os problemas de controle de processos industriais com receitas prontas. É importante entender as origens e limitações de cada uma destas fórmulas para poder aplicá-las com critério, utilizando cada uma nas aplicações e no contexto adequado. Mais ainda, inúmeras situações existem para as quais não existe fórmula alguma e o projeto deve se valer de maior quantidade de informação sobre o processo e de um processamento analítico desta informação. Nestas situações métodos mais complexos de ajuste são necessários. A complexidade destes métodos traduz-se na quantidade de informação exigida do processo. Modelos mais completos para o sistema são necessários e métodos analíticos devem ser aplicados para o ajuste.

Alocação de Pólos

Considere que o modelo do processo é dado por uma função de transferência estritamente própria de segunda ordem

$$(4.4)$$

e o controlador PID tem a função de transferência

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.5)$$

onde

$$\left| \begin{array}{c} \\ \end{array} \right| = c_2 \quad (4.6)$$

$$K_p \left| \begin{array}{c} \\ \end{array} \right| = c_1 \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{T_s} = c_0 \quad (4.8)$$

Então a função de transferência do sistema em malha fechada é dada por

$$\frac{1}{T_i T_d} \quad (4.9)$$

O método de alocação de pólos consiste em alocar os pólos do sistema em malha fechada em posições pré-especificadas.

Os pólos assim escolhidos determinam o polinômio característico de malha fechada $T(s) =$

para os pólos de malha fechada são $p(s)$, p_1 e p_2 então

$$p_3 \quad (4.10)$$

Então o ajuste do PID consiste em calcular os parâmetros que satisfazem à equação abaixo, dita equação diofantina:

$$c \quad (4.11)$$

Equacionando os coeficientes de mesmo grau dos polinômios desta equação e resolvendo para os coeficientes obtém-se

$$(b_1 c_2 + 1)s^3 + (b_1 c_1 + b_0 c_2 + a_1)s^2 + (b_1 c_0 + b_0 c_1 + a_0)s + b_0 c_0 = (b_1 c_2 + 1) \cdot q(s) \quad (4.12)$$

$$(b_0 b_1) c_2^2 + (b_0 + a_1 b_1 - a_0 b_0 b_1) c_2 + (\quad (4.13)$$

$$c_1 = \frac{b_0 p_1 - a_0 b_0 (b_1}{b_1 c_2} \quad (4.14)$$

O projeto por alocação de pólos consiste portanto dos seguintes passos:

1. obter um modelo de segunda ordem para o processo;
2. escolher os pólos de malha fechada;
3. calcular os coeficientes resolvendo a equação (4.13) e em seguida usando as fórmulas (4.14) e (4.15);
4. calcular os parâmetros do controlador a partir de (4.7)-(4.9).

Enquanto os dois últimos passos são triviais e mecânicos, os dois primeiros requerem maior atenção. A obtenção de um modelo na forma (4.5) pode ser relativamente simples através de um ensaio da resposta ao salto do sistema, usando os métodos dos mínimos quadrados para ajuste dos parâmetros do modelo. Os pólos de malha fechada devem ser escolhidos de forma a garantir o tempo de estabilização exigido. Uma vez que o tempo de estabilização é dado aproximadamente por

$$c_0 = \frac{p_0}{(b_1 c_2 + 1) b_0} \quad (4.15)$$

onde é a parte real do pólo dominante, a garantia do tempo de estabilização desejado é alcançada escolhendo

todos os pólos com partes reais $-\sigma_i$ tais que

$$\sigma \quad (4.16)$$

O amortecimento dos pólos de malha fechada [4.2](#) deve ser suficientemente grande a fim de atender requisitos de máxima sobrepassagem e garantir margens de robustez. Finalmente, a fim de minimizar o esforço de controle e portanto a manifestação de efeitos não linear e dinâmica de alta frequência, os pólos de malha fechada devem ser tão próximos quanto possíveis dos pólos de malha aberta, dentro das restrições acima.

Resposta em Frequência

Considere que a resposta em frequência do processo é conhecida na forma de um diagrama de Bode. Então o projeto do PID pode ser feito alterando de maneira adequada o formato da resposta em frequência da função de malha

a fim de atender certos critérios. Este procedimento de projeto é conhecido como *loop shaping*.

Os critérios a serem atendidos são valores previamente especificados para a margem de ganho (MG), a margem de fase (MF) e a banda passante (BP). Estes critérios traduzem especificações de rapidez da resposta, sobrepassagem e robustez. Quanto maior a banda passante da função de transferência de malha mais rápida será a resposta do sistema. A margem de fase e a margem de ganho expressam diretamente a robustez do sistema a erros de modelagem. Por outro lado, uma boa margem de fase usualmente garante pequena sobrepassagem. Valores adequados para estes critérios são, para a maioria dos casos:

$$PID(s)G(s) \tag{4.1}$$

$$7) \quad MG > 2$$

$$8)$$

O projeto consiste então em ajustar a forma do diagrama de Bode da função de transferência de malha de forma a garantir o atendimento destes critérios e obtendo a maior banda passante possível a fim de que a resposta seja a mais rápida possível. Uma ressalva: esta "maximização" da banda passante deve ser feita apenas dentro de certos limites estabelecidos principalmente por considerações relativas à resposta dos atuadores.

Seja o controlador PID dado na forma [4.3](#)

$$MF > 45^\circ \tag{4.19}$$

A resposta em frequência correspondente é dada na Figura [4.3](#).

$$PID(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s(1 + s/p)}$$

Figure 4.3: Diagrama de Bode para a função de transferência do controlador PID.

A contribuição do pólo da parte derivativa acontece apenas numa faixa de altas frequências e portanto pode ser desconsiderada durante o projeto. A contribuição dos pólos é dada pela estrutura do controlador, deixando como graus de liberdade apenas às posições dos zeros do controlador e o ganho K . Assim, o projeto pode ser iniciado traçando o

diagrama de Bode para a parte fixa da função de transferência de malha, ou seja, para a função

$$F(s) \tag{4.20}$$

Os zeros devem ser escolhidos de forma a fornecer um avanço de fase na faixa de frequências de interesse. A seguir o ganho é escolhido de forma a obter as margens especificadas. O método pode ser resumido portanto nas seguintes etapas:

1. obter a resposta em frequência do processo;
2. traçar o diagrama de Bode de $G(s)$ em (4.21);
3. escolher os zeros z_1 e z_2 fornecendo avanço de fase em torno da frequência de ω_c ;
4. calcular o ganho K que garanta MG e MF adequadas.

A escolha da posição dos zeros exige conhecimento e certa experiência do projetista. Como exemplo, vamos estudar este projeto para processos dados por uma função de transferência do tipo

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1} \quad (4.21)$$

e considerar o caso em que o atraso é pequeno, sendo a resposta do sistema dominada pela constante de tempo, ou seja, $L \ll T$. O diagrama de Bode da função $G(s)/s$ neste caso é dado na Figura 4.4.



Figure 4.4: Diagrama de Bode para a função de transferência $G(s)/s$ com $L \ll T$ (linha cheia) e função compensada (linha tracejada).

Uma vez que o pólo do sistema é lento, os zeros não devem ser alocados próximos a ele pois isto prejudicaria o desempenho na rejeição a perturbações. A fim de obter manter a planura da resposta em frequência é conveniente manter uma certa distância entre os zeros. Com estas considerações escolhemos os zeros segundo o critério:

- 2) $z_1 = \frac{2}{T}$ (4.2)
- 3) $z_2 = \frac{2}{T}$ (4.2)

Se o modelo matemático não é conhecido, mas apenas os dados da resposta em frequência, a constante de tempo pode ser estimada como o inverso da frequência de corte desta resposta em frequência. Fazendo o cálculo pelas assíntotas do diagrama de Bode vemos que o ganho de alta frequência da função compensada é dado por

$$K_c \quad (4.24)$$

Uma vez que este ganho mantém-se para altas frequências, este será o ganho na frequência em que a fase chegar a -180° e portanto este g

$$K_c \quad (4.25)$$

e com isto o projeto está completo.

Ajuste Manual

Os modelos utilizados para o projeto nem sempre são suficientemente completos e os métodos, por se pretenderem de aplicação genérica, muitas vezes fornecem ajustes que podem ser melhorados. Por esta razão, por vezes é conveniente, após ter obtido um ajuste para o PID por meio de um dos métodos apresentados, efetuar manualmente um *ajuste fino* dos parâmetros do controlador tendo em conta o desempenho observado do sistema. Para tanto é preciso ter em mente o efeito de cada uma das ações de controle sobre o desempenho do processo, de acordo com o exposto no Capítulo 2. A partir daqueles princípios podem ser estabelecidas regras para guiar este ajuste fino. Em alguns casos em que os requisitos de desempenho são mínimos, pessoal com grande experiência pode fazer o ajuste exclusivamente manual a partir de regras deste tipo. A Tabela abaixo apresenta um sumário que pode servir de guia ao operador efetuando o ajuste manual, sempre tendo em mente que este ajuste manual tem por objetivo unicamente refinar o ajuste já feito do controlador e portanto as variações efetuadas nos parâmetros devem ser pequenas.

Problema	Medida de ajuste
Resposta muito lenta	aumentar ganho proporcional
Resposta excessivamente oscilatória	aumentar tempo derivativo
Sobrepassagem excessiva	reduzir taxa integral
Resposta inicialmente rápida e em seguida muito lenta	aumentar taxa integral

Aplicações de cada método

Cada um dos métodos discutidos acima apresenta vantagens e desvantagens, tendo seus campos de aplicação definidos em função destas. O método da resposta ao salto é simples e direto, baseado em informações que podem ser obtidas para qualquer processo, no entanto limitado pela sua própria simplicidade e pouco preciso devido a sua sensibilidade a ruídos e seu caráter gráfico. Se comparado com o método da resposta ao salto, o método do período crítico é menos limitado, porém a implementação do ensaio com relé no qual este método está baseado é menos prática e direta.

Os ajustes obtidos a partir destes ensaios simples são muitas vezes suficientes para processos industriais, no entanto aplicações existem em que maior precisão e desempenho são exigidos. Nestes casos é preciso basear o ajuste em uma maior quantidade de informação sobre o processo. Esta informação é usualmente dada na forma de uma função de transferência, ou de um diagrama de resposta em frequência. A obtenção de tais modelos requer certo grau de conhecimento teórico e pode ser trabalhosa, bem como o projeto em si, ao contrário dos métodos não baseados em modelos, nos quais a etapa de projeto consiste em aplicação simples de fórmulas prontas. Por outro lado, o desempenho que pode ser obtido por um projeto criterioso utilizando estes modelos é bastante superior àquele obtido por meio dos outros métodos.

Método	Vantagens	Desvantagens	Aplicações
Resposta ao salto	simplicidade	sensibilidade a ruído	processos não oscilatórios
		desempenho	
Período crítico (modif.)	simplicidade	desempenho	processos simples
	robustez		sist. eletromecânicos
			com baixos requisitos
			de desempenho
Alocação de pólos	flexibilidade	obtenção do modelo	processos sem
			atraso significativo
	alto desempenho		

Resposta em frequência	alto desempenho	complexidade do projeto	processos genéricos
	robustez		
Ajuste manual	-	-	ajuste fino

Simulink


3.1 Introdução

Simulink é um programa que roda como um complemento ao MATLAB. Serve como meio de auxílio na modelagem dinâmica de sistemas através de uma interface gráfica baseada em GUI (graphical user interface), isto é, construir sistemas por diagramas através de blocos padronizados.

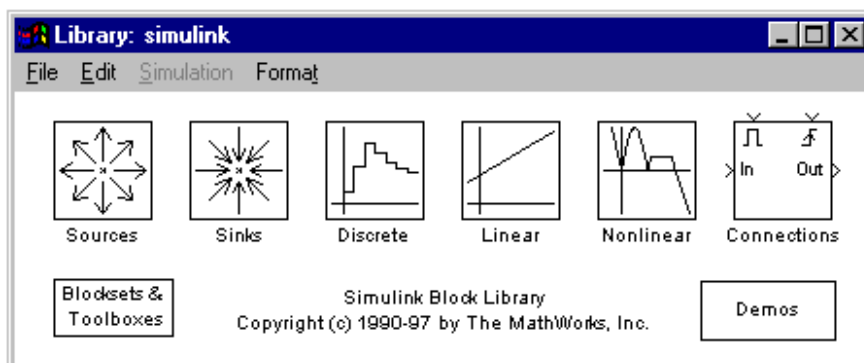
Nesta apostila será apresentado através de exemplos simples todos os principais conceitos para desenvolver diagramas mais complexos.

O primeiro exemplo ao lado mostra um diagrama de blocos de uma entrada senoidal sendo integrada e apresentada num gráfico, através do bloco MUX

Para executar o Simulink primeiro é necessário iniciar o MATLAB , então para executar o Simulink existem três alternativas

- Clicar no ícone  do Simulink na barra de ferramentas do MATLAB;
- Entrar com o comando Simulink no prompt do MATLAB;
- Especificar um arquivo Simulink.

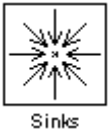
Quando o MATLAB terminar o processamento para carregar o Simulink, uma janela do modelo em branco aparecerá e a biblioteca de blocos do Simulink aparecerá como mostrado abaixo.



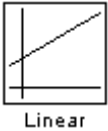
Na biblioteca de blocos cada conjunto de blocos contém uma classe de blocos do Simulink.



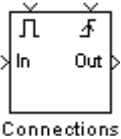
Sources – Blocos tipo fonte *source*. Geradores de sinal.
O bloco **seno** é uma fonte geradora de sinal



Sink - Blocos que possibilitam um lugar para visualizar resultados.
O bloco **scope** é um bloco sink.



Linear – Blocos que possibilitam transformações lineares.
O bloco integrador é um exemplo.

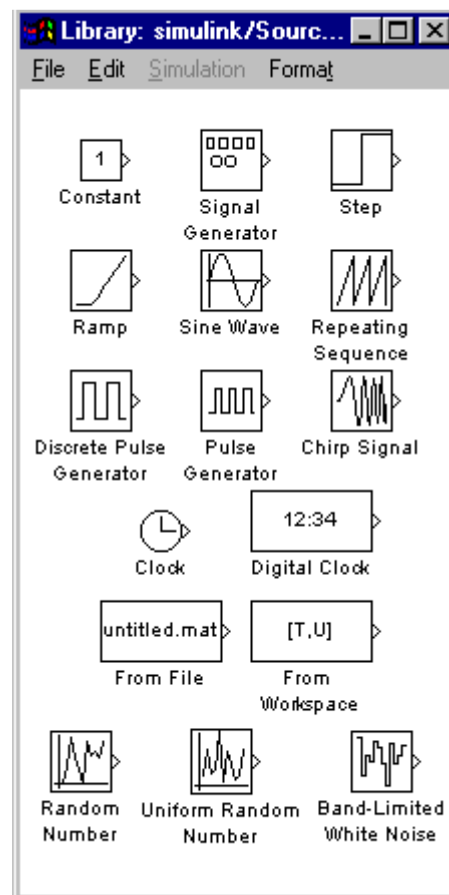


Connection – Blocos que possibilitam executar conexões.
Bloco MUX é um exemplo

3.2 Adicionando um Bloco de uma Biblioteca

Para abrir uma biblioteca, basta clicar duas vezes sobre o tipo desejado. Por exemplo clicando-se duas vezes sobre a biblioteca **Sources** tem-se a seguinte figura :

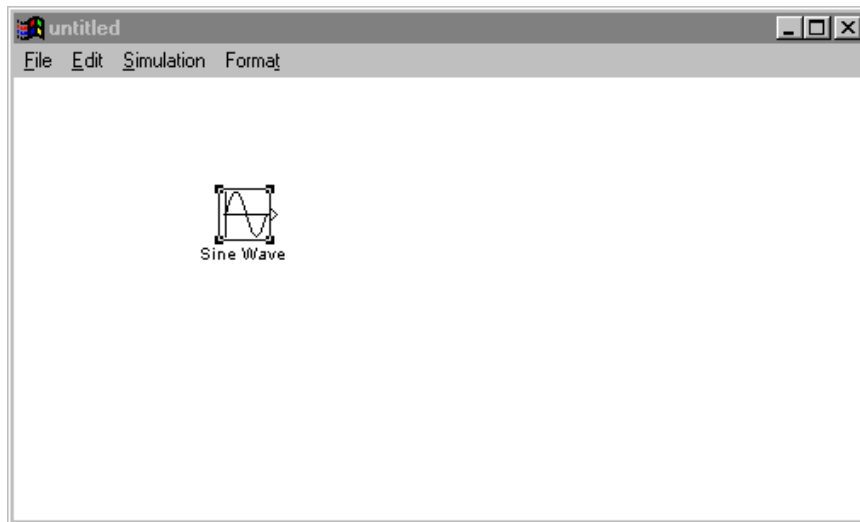
Janela da biblioteca Sources



Para adicionar um bloco ao diagrama, basta pressionar com o botão direito do mouse sobre o bloco desejado, arrastá-lo para dentro do modelo e então soltar o botão.

3.3 Selecionando, Copiando e Movendo Blocos

Um ponto importante precisa ser lembrado inicialmente, para agir sobre um bloco ou um outro objeto, este deve primeiramente ser selecionado. A maneira mais simples de selecionar um objeto é clicar nele com o mouse com o botão esquerdo. Os blocos selecionados têm nos cantos pequenos pontos pretos, como aparece na figura ao abaixo. Para deselegionar um objeto, basta clicar num ponto vazio mais próximo.



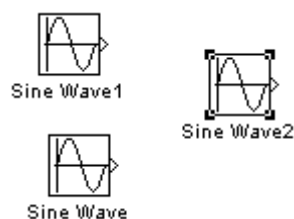
Observe que quando o bloco **sin** é selecionado e o botão do *mouse* não é solto, o bloco se move junto ficando na posição onde o botão for solto. Portanto o bloco será movido e pode ser colocado numa posição desejada.

Um conjunto de objetos também pode ser movido, selecionando-os e clicando sobre um deles, movendo-os para um ponto desejado sobre a janela do modelo Simulink

Se entretanto, você pressiona o botão esquerdo do *mouse* em um bloco e arrastá-lo para uma janela diferente, uma cópia do objeto selecionado aparecerá na nova janela

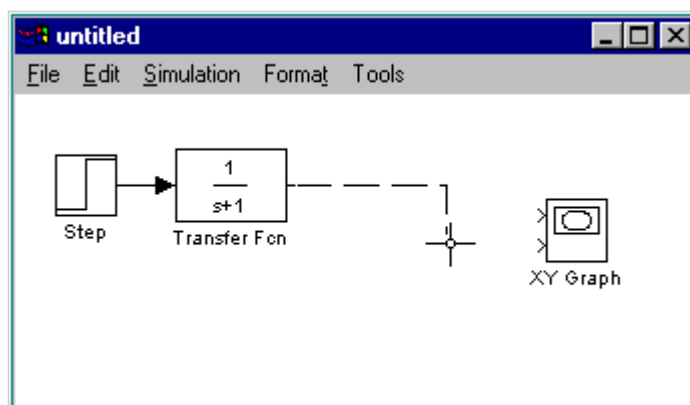
Observe que você não pode deletar mover ou copiar blocos dentro das bibliotecas, os blocos são protegidos.

Cada bloco especificado em um diagrama deve ser único e deve conter ao menos um caracter na descrição. Ao copiar um bloco, os nomes herdados do bloco original incluem um número que diferencia um nome do outro. O segundo bloco **Sine Wave** é especificado como **SineWave 1**, e o terceiro como **Sine Wave2**:

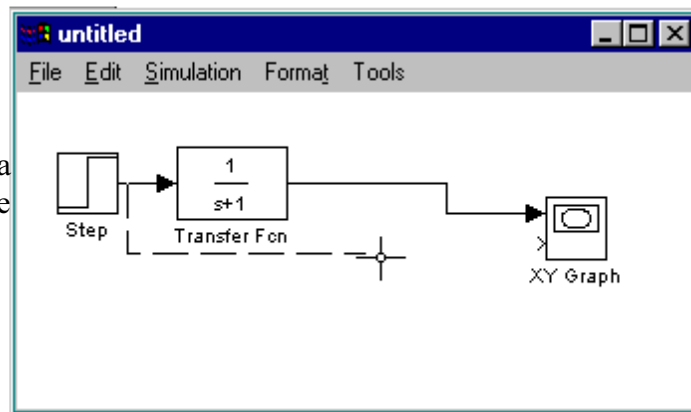


3.4 Conexões entre blocos

Para realizar a conexão entre blocos clica-se com o mouse sobre o ponto > a direita de um bloco(indicando sua saída) e arrastando a linha que surgirá, sem soltar o botão do mouse até o bloco subsequente que contiver um > do lado esquerdo, isso significa que uma entrada pode ser conectada.

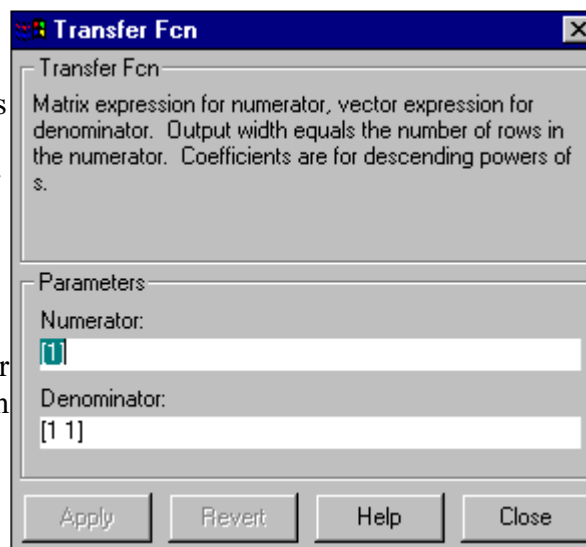


Para realizar uma segunda conexão de uma bloco com uma única saída, clica-se com o mouse com o botão **direito** sobre a linha que indica a saída do bloco e conecta-se onde se deseja.

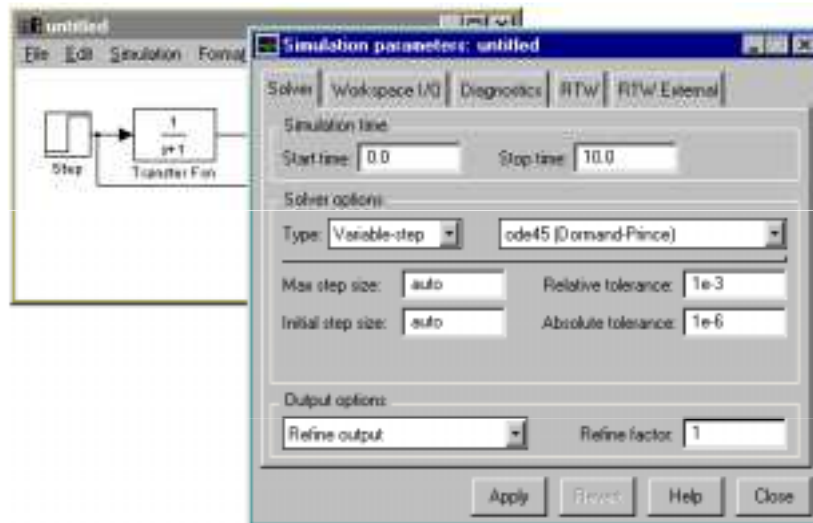


3.5 Executando uma simulação

Cada bloco do Simulink tem parâmetros que podem ser ajustados como desejado, no exemplo acima temos a função de transferência definida no bloco **Transfer Fcn**. Se quisermos mudar os parâmetros deste bloco, clica-se duas vezes com o botão esquerdo do mouse sobre o bloco e tem-se então a seguinte janela ao lado. Neste caso os coeficientes do polinômio do numerador e do polinômio do denominador podem ser alterados

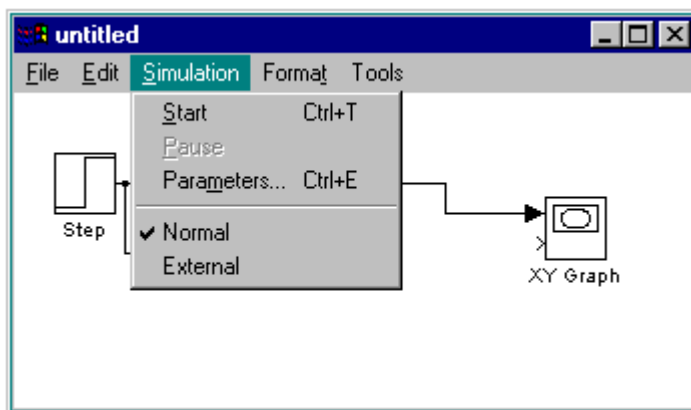


Para a execução da simulação pode ser necessário ajustar parâmetros. Estes parâmetros podem ser acessados na opção **Parameters** do ítem **Simulation** do menu principal.

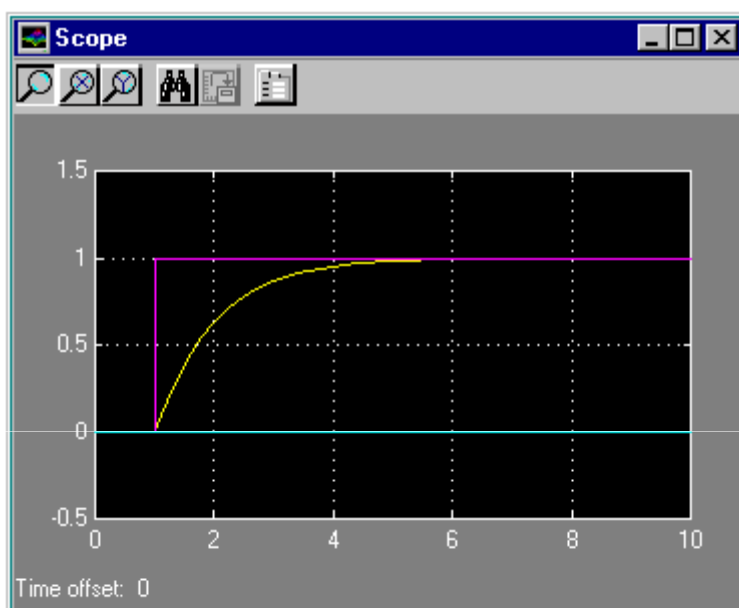
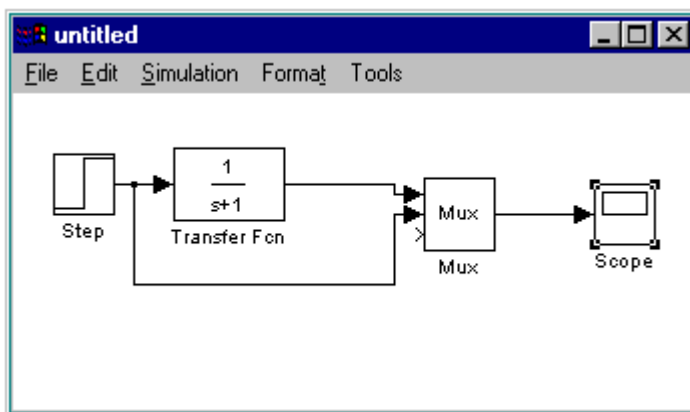


A realização da simulação é iniciada através da opção **start** do ítem **Simulation** do menu principal.

Durante a realização da simulação se houver a necessidade de interromper a simulação vá a **stop** do menu **Simulation**.



Executando-se o seguinte diagrama Simulink ao lado, obtém-se clicando duas vezes com o botão o seguinte gráfico abaixo:



A janela gráfica do bloco Scope, tem possibilidades de reajuste dos limites dos eixos, opções de zoom e clicando-se e segurando uma das bordas é possível modificar o tamanho da janela gráfica

3.6 Análise e Controle de Processos

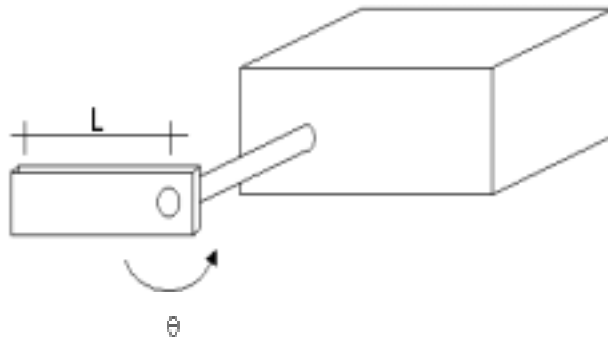
Assim como no **MATLAB** no **Simulink** também é possível analisar e realizar simulações de controle em processos.

Como exemplo tomemos o modelo dinâmico em equações diferenciais não-lineares de um robô de um grau de liberdade:

elo;

$$(I+I_mK_r^2) \ddot{\theta} + mgL \sin(\theta) + F\dot{\theta} = \tau$$

Onde L é o comprimento do



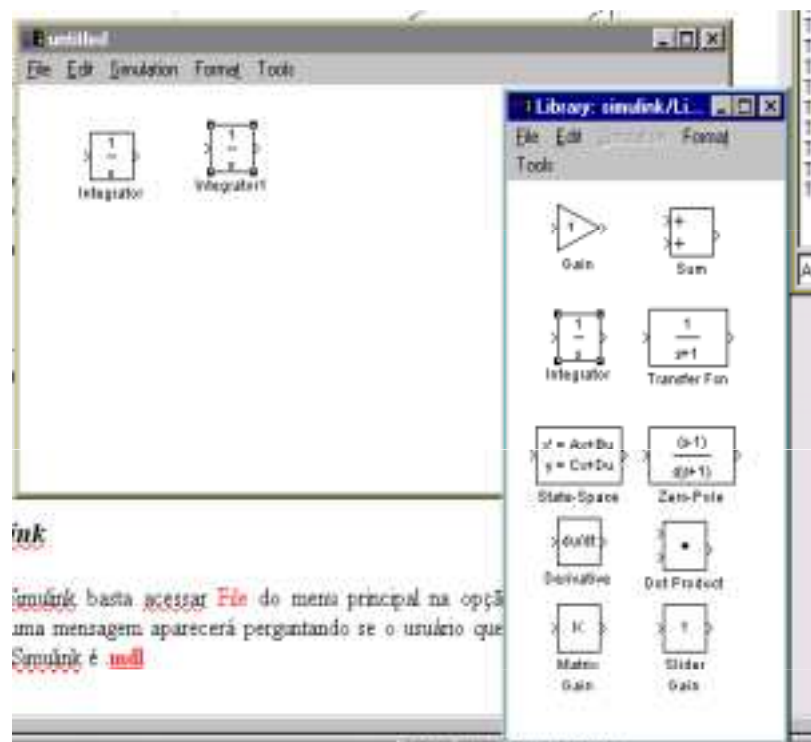
m a massa I a inércia do elo, I_m a inércia do motor; g a gravidade; K_r a relação de redução entre motor e elo; F o coeficiente de atrito de rotação; θ o

ângulo de rotação a partir da posição do elo voltado para inferior ($\theta=0$) e τ é o torque aplicado a junta

Como avaliar a posição e velocidade com o Simulink:

1 - Criar um novo arquivo - **File - New**

2- Inserir dois blocos Integradores (Grupo lineares)

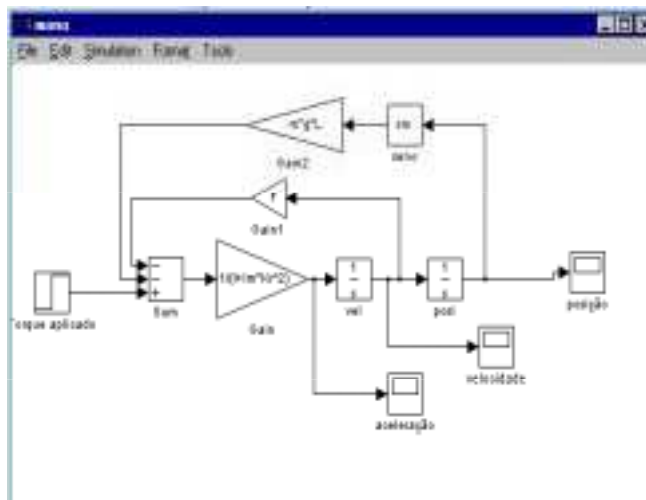


Note que se a saída do segundo integrador for θ , então sua entrada é $\dot{\theta}$ e se esta for saída do primeiro integrador então a entrada deste será $\ddot{\theta}$. Isolando-se na equação $\ddot{\theta}$ acima, monta-se o diagrama de blocos abaixo.

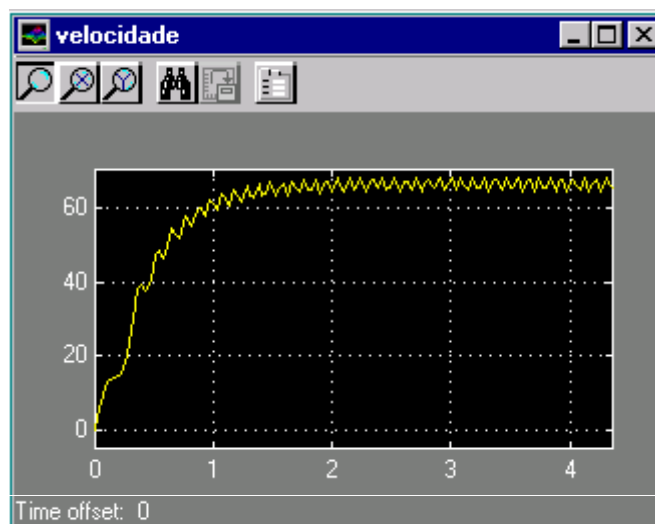
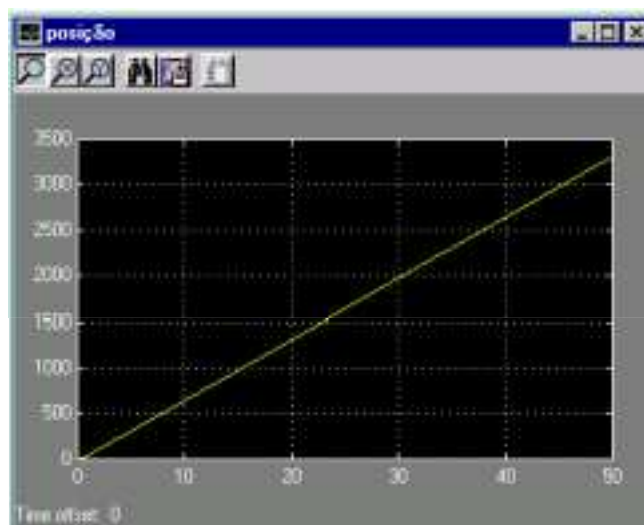
Neste diagrama foram utilizados os blocos **sin**, **step**, **sum**, **gain** e **scope**. Realizando a alteração dos nomes dos blocos, pode-se simular a reação da aceleração velocidade e posição deste robô, para uma dada entrada de torque aplicada (no caso um degrau)

Portanto realizando a experimentação com os seguintes parâmetros :

```
L=0.3 ; %metro
g=9.81; %gravidade
m=0.5; %massa do elo
F=L*m/2; %Coeficiente de atrito proporcional ao comp do elo e a m
I=0.001 ; %Inércia da junta
Im = 0.01 ; %Inércia do motor
Kr=1 ; %relação da redução
```



Tem-se as seguintes respostas no tempo



3.7 Para realizar o controle deste sistema

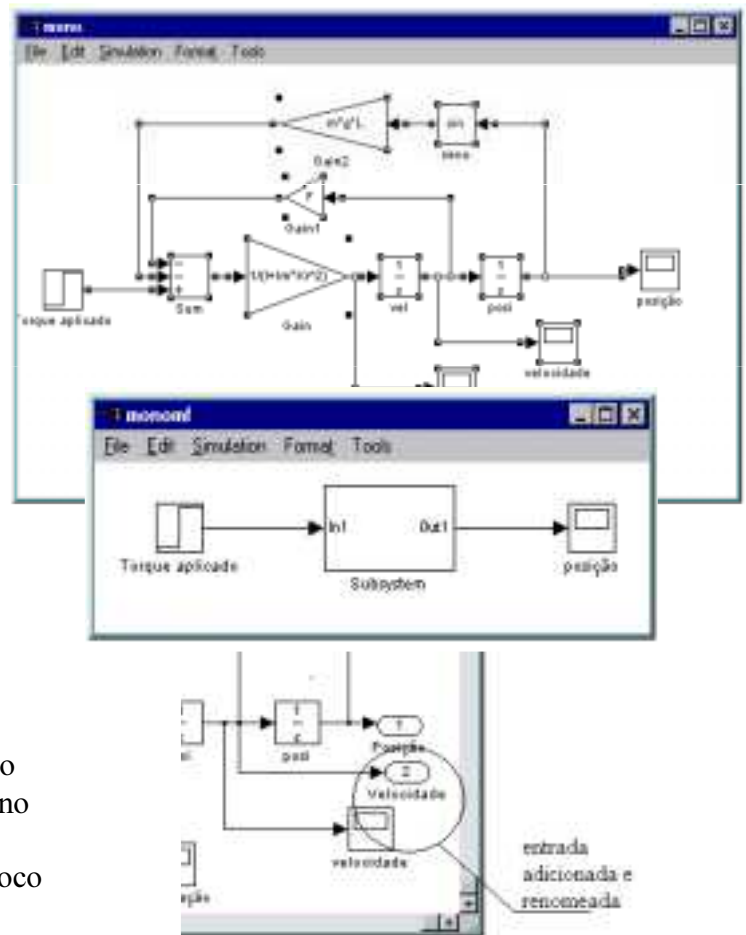
Vamos supor que queremos controlar a posição do eixo de rotação com um determinado ângulo θ desejado, atuando-se sobre o torque de entrada.

Para resolver este problema de uma forma mais simples podemos agrupar todo nosso sistema num subsystem (um único bloco) com entrada de torque e saída de posição e velocidade.

Para seleccionar os blocos que farão parte do Subsystema , clica-se com o botão direito do mouse e cria-se um retângulo de seleção de tal forma que dentro fique os blocos que desejamos. Ao soltar o botão do mouse, os blocos seleccionados aparecerão com os cantos em negrito.

A figura ao lado mostra o resultado desta operação

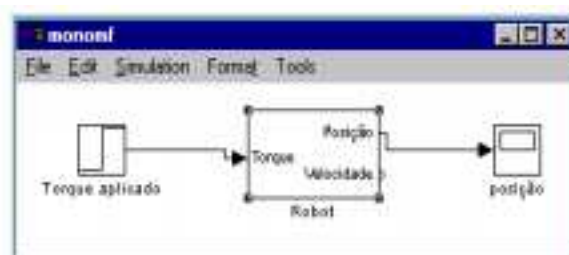
Acessando no menu principal a opção **Edit- Create SubSystem**, obtém-se o seguinte resultado ao lado



Para adicionar mais uma saída ao nosso subsystema, clica-se duas vezes com o mouse no bloco e inseri-se o bloco **OUT** no grupo **Connection** . Observe que também existe o bloco input, ou seja para o caso de desejarmos gerar outra entrada no nosso subsystema, situação esta que não se aplica ao nosso exemplo.

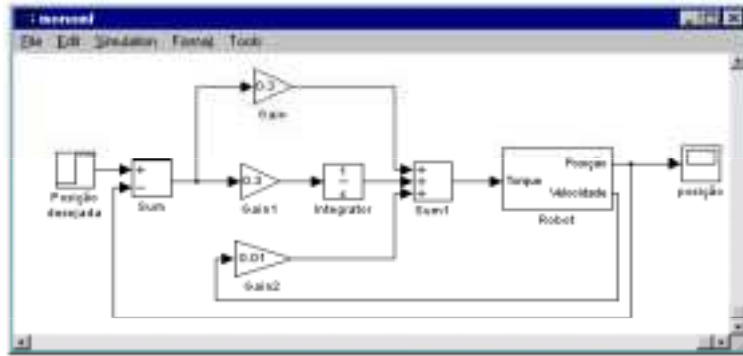
Renomeando o bloco subsystem e adicionando a saída de velocidade:

Tem-se então o resultado final:

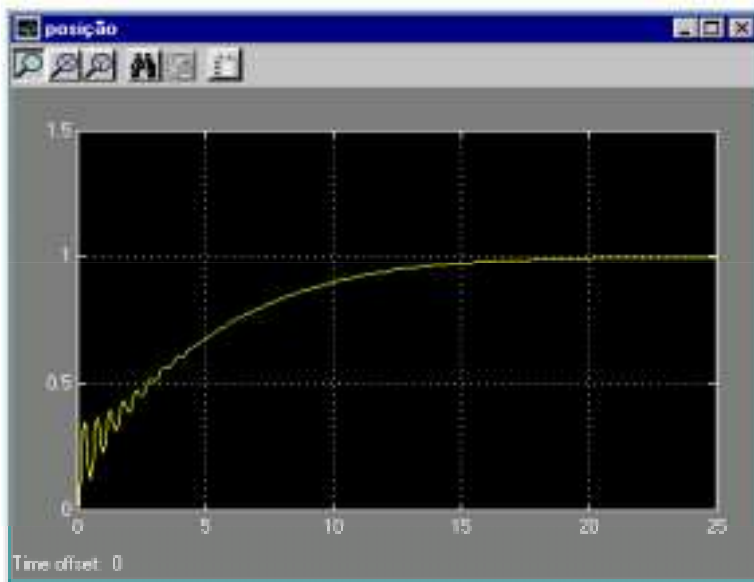


Para realizarmos o controle PID por exemplo, necessitaremos de um bloco **SUM** (somatório) , para comparar a referência com a saída do sistema, um bloco **Gain** (ganho), para gerar o ganho proporcional um **Integrator** para o integrador

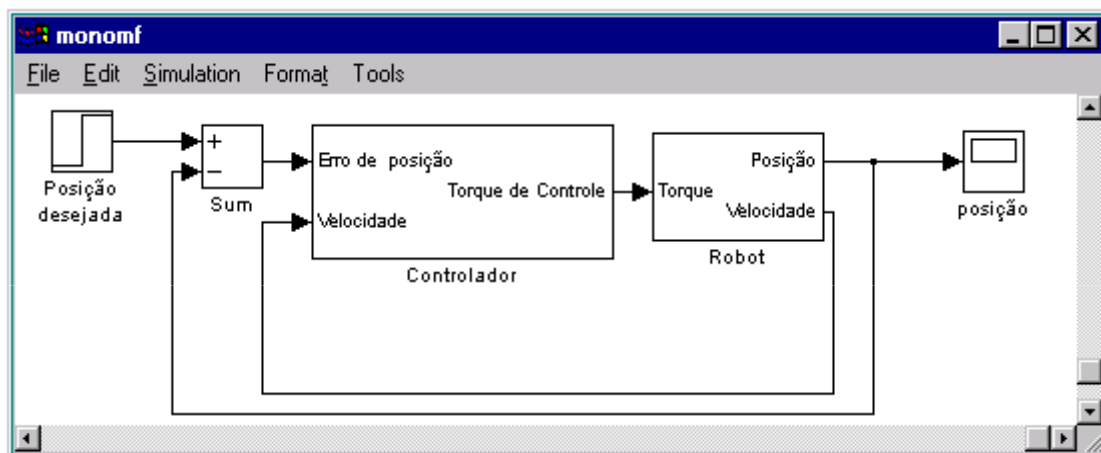
Arranjando os blocos como mostrado no programa **monomf.mdl** tem-se o seguinte resultado



Realizando a simulação, com ganhos definidos e posição desejada igual a 1 rad tem-se o seguinte resultado para a posição do eixo do robô:



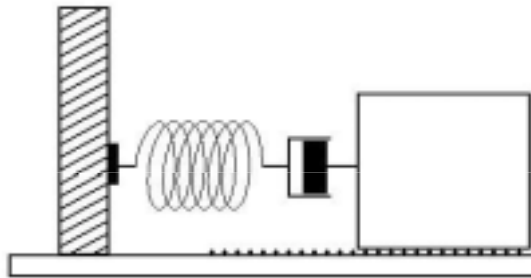
Pode-se comprimir mais ainda o nosso exemplo, podemos criar um **subsystem** Controlador da mesma forma que foi apresentado acima, assim o modelo fica:



Para a análise da dinâmica de sistemas lineares regidos por equações diferenciais ordinárias, pode-se optar pela representação do diagrama de blocos do sistema como acima, ou utilizar a transformada de Laplace como ferramenta matemática.

Aplicando-se a transformada de Laplace tem-se as funções de transferência. Estas funções podem representadas no Simulink, pelo bloco **Transfer Function**, no Grupo Linear.

Por exemplo num sistema massa mola



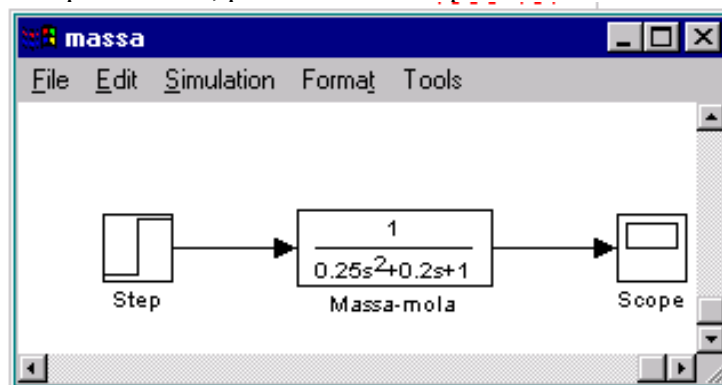
Neste sistema tem-se uma equação diferencial de segunda ordem onde é representado o amortecimento τ do sistema e a frequência natural w_n . Neste sistema a entrada é uma força aplicada sobre o bloco ($F(t)$) e a saída é a posição deste bloco ($x(t)$).

$$\frac{1}{w_n^2} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2\tau}{w_n} \frac{dx}{dt} + x(t) = F(t)$$

Fazendo-se a transformada de Laplace desta EDO, tem-se a função de transferência para esta sistema

$$\frac{F(s)}{x(s)} = \frac{K_p}{\frac{1}{w_n^2} s^2 + \frac{2\tau}{w_n} s + 1}$$

Fazendo $\tau=0.2$ $K_p=1$ e $w_n=2$, podemos então representar o sistema no Simulink



Que resulta na seguinte resposta a uma entrada em degrau de valor 1

