4. Resposta no Domínio do Tempo

➢ Pólos, Zeros e Resposta do Sistema: Definições

- Resposta do sistema: soma da resposta forçada + resposta natural

1. Resposta forçada é também chamada de resposta estacionária (ou solução particular);
2. Resposta natural é também chamada de solução homogênea.

- Pólos de uma Função de Transferência:

Os valores da variável, s, da transformada de Laplace que fazem com a FT se torne infinita.

- Zeros de uma Função de Transferência:

Os valores da variável, s, da transformada de Laplace que fazem com a FT se torne igual a zero.

➢ Pólos, Zeros e Resposta do Sistema de Primeira Ordem

Seja a Função de Transferência G(s) dada por:

$$G(s) = \frac{s+2}{s+5}$$

4. Resposta no Domínio do Tempo

Admitindo-se uma entrada degrau unitário:

$$C(s)=\frac{s+2}{s(s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+5}=\frac{2/5}{s}+\frac{3/5}{s+5}$$

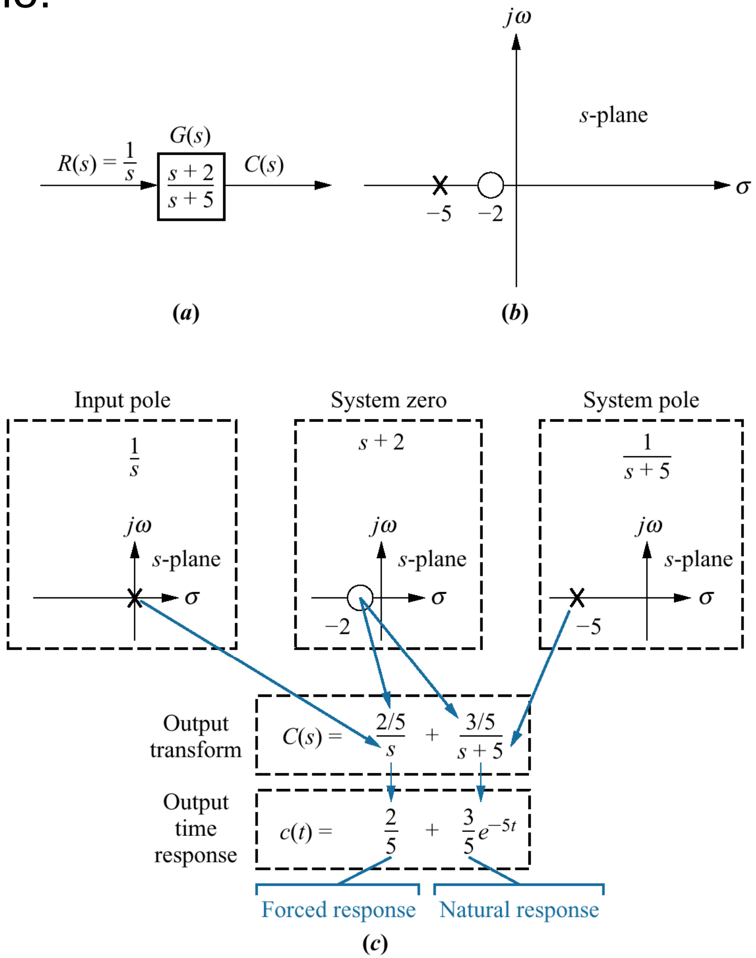
➢ Com base neste desenvolvimento:

1. O pólo da função de entrada gera a forma da resposta forçada.

2. O pólo da FT gera a forma da resposta natural.

3. Um pólo no eixo real gera uma resposta exponencial e^{-at}.

4. Pólos e zeros determinam as amplitudes de ambas as respostas.



4. Resposta no Domínio do Tempo

- **Sistemas de Primeira Ordem**

Considere os sistema cuja FT é dada por:

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

Se a entrada for um degrau unitário, R(s)=1/s, então

$$C(S) = R(s)G(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, obtém-se que:

$$c(t) = c_f(t) + c_n(t) = 1 - e^{-at}$$ em que $c_f(t) = 1$ e $c_n(t) = -e^{-at}$

- Parâmetro que descreve a resposta transitória (a):

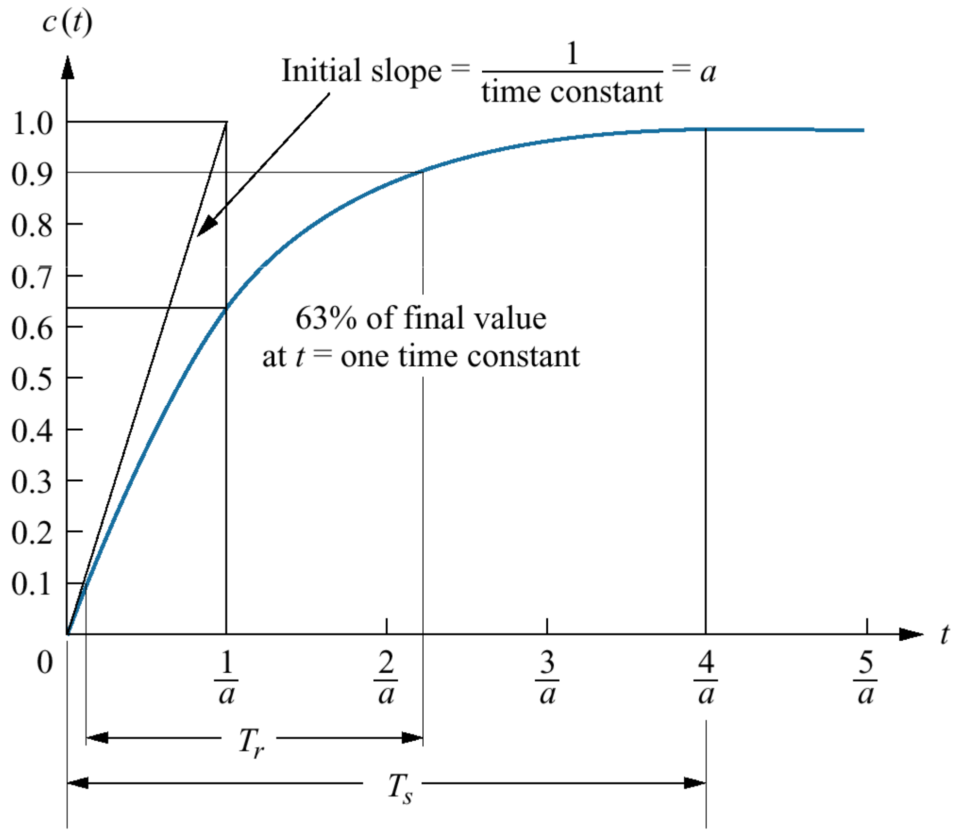
seja: $e^{-at}\Big|_{t=1/a} = e^{-1} = 0.37$ ou $c(t)\Big|_{t=1/a} = 1 - e^{-at}\Big|_{t=1/a} = 1 - e^{-1} = 0.63$

4. Resposta no Domínio do Tempo

➢ Sistemas de Primeira Ordem - Especificações

Três especificações de desempenho da resposta transitória:

1. Denomina-se 1/a de constante de tempo da resposta.
2. O tempo de subida (Tr) é o tempo necessário para o sistema vá de 0.1 até 0.9 do valor final.
3. Tempo de regime (Ts) é o tempo necessário para que o sistema alcance 2% do valor final.



4. Resposta no Domínio do Tempo

➢ **Sistemas de Primeira Ordem - Especificações**

Seja a FT de primeira ordem obtidas experimentalmente:

Considere um sistema de primeira ordem dado por:

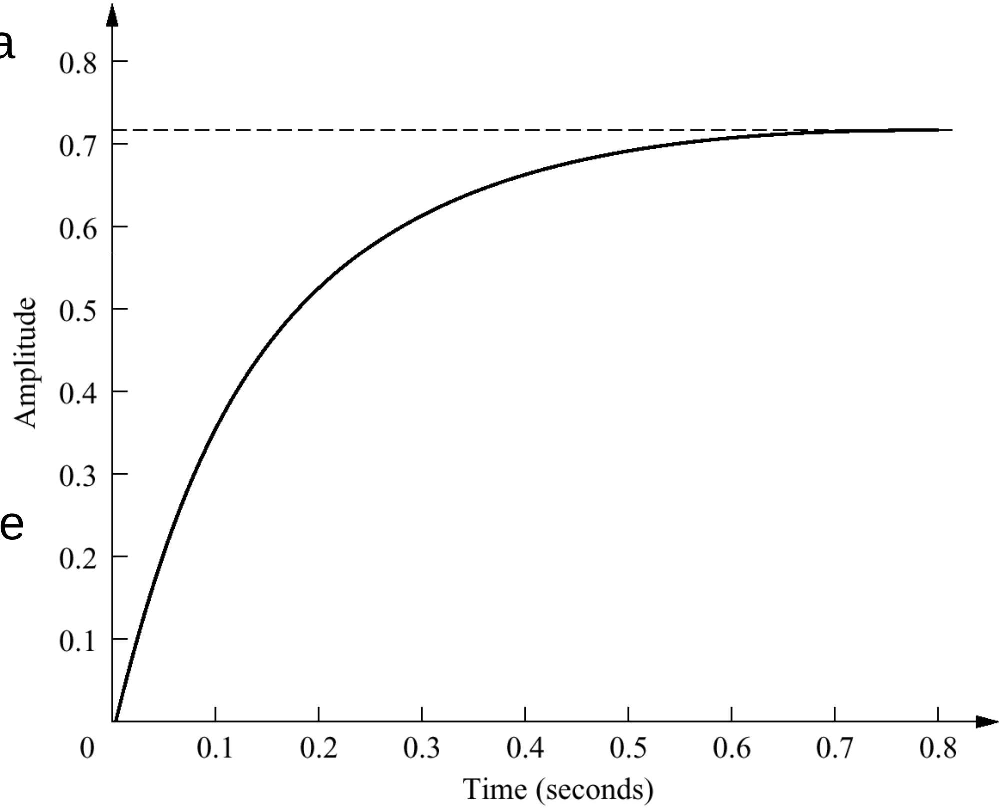
$$G(s)=\frac{K}{s+a}$$

$$C(s)=\frac{K}{s(s+a)}=\frac{K/a}{s}+\frac{K/a}{s+a}$$

A constante de tempo (63%) pode ser obtida como:

$$c(t)_a=0.63\times 0.72=0.45$$

$$t=0.13s \Rightarrow a=1/0.13=7.7$$



4. Resposta no Domínio do Tempo

- **Sistemas de Primeira Ordem - Especificações**

- Especificações da FT de primeira ordem obtidas experimentalmente:

A transformada inversa de Laplace da resposta ao degrau é

$$c(t) = K/a - (K/a)e^{-t/a}$$

O que significa que em regime permanente o sistema converge para K/a, assim:

$$K/a = 0.72 \qquad \text{como:} \qquad a = 7.7 \Rightarrow K = 7.7 \times 0.72 = 5.54$$

Desta forma, a função de transferência do sistema é dada por:

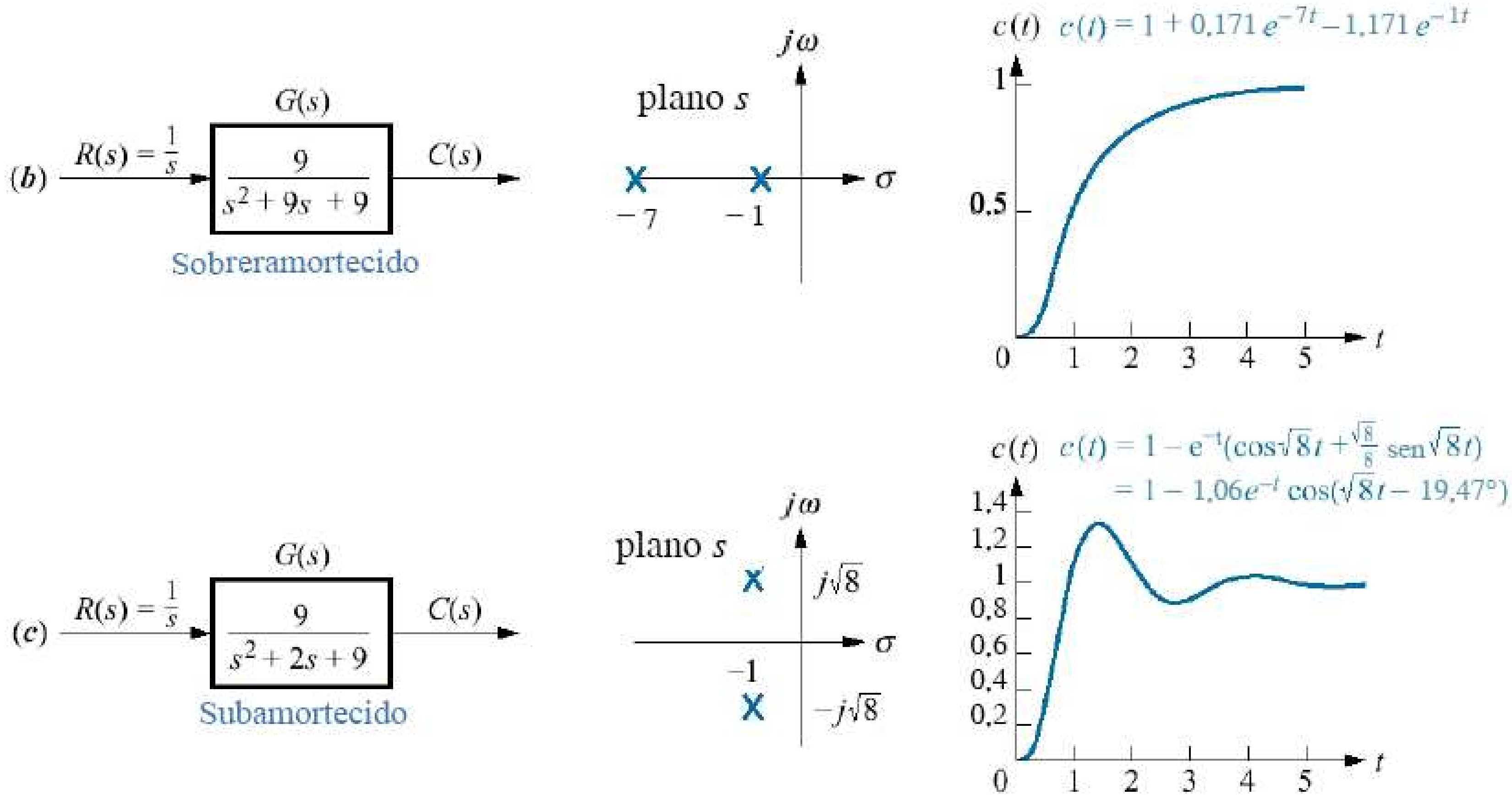
$$G(s) = \frac{5.54}{s+7.7}$$

É importante observar que o gráfico analisado, foi gerado por:

$$G(s) = \frac{5}{s+7}$$

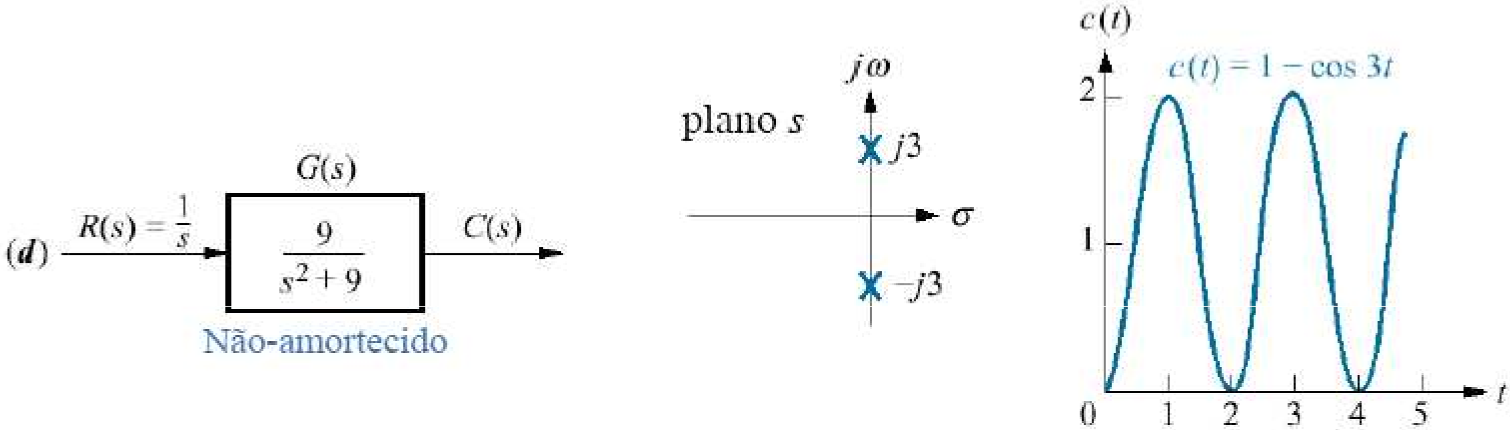
4. Resposta no Domínio do Tempo

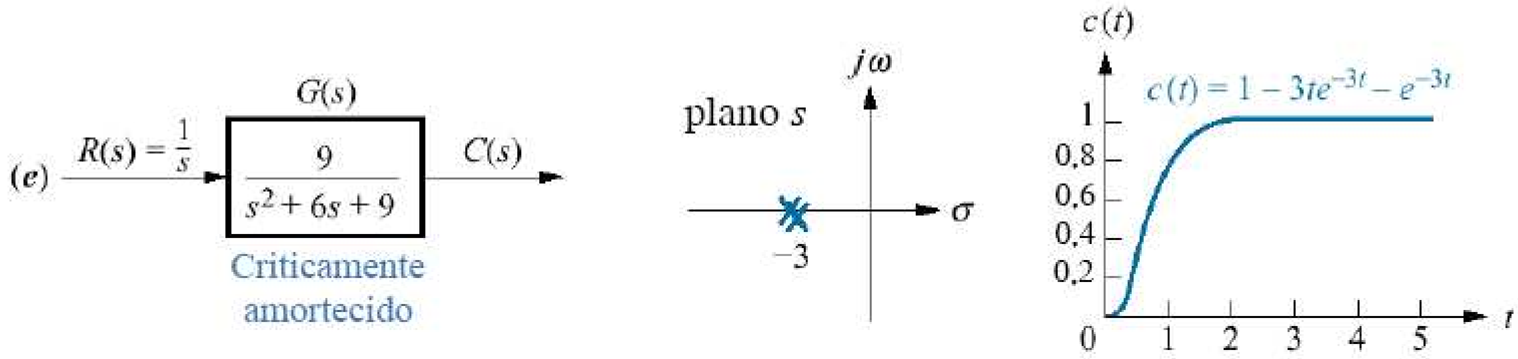
➢ **Sistemas de Segunda Ordem – Tipos de respostas**



4. Resposta no Domínio do Tempo

- **Sistemas de Segunda Ordem – Tipos de respostas**





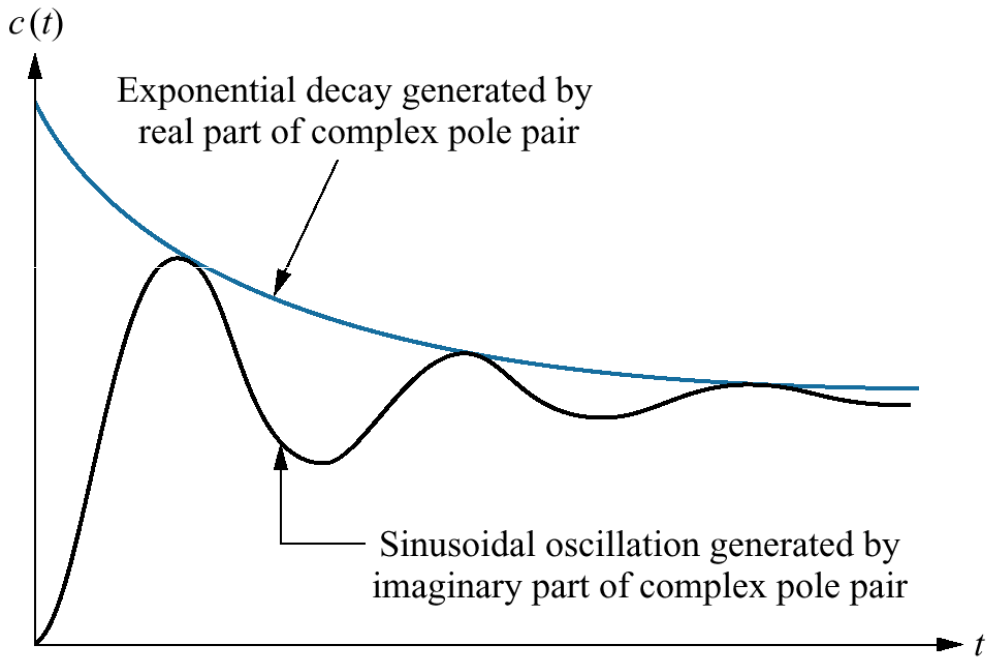
4. Resposta no Domínio do Tempo

➢ Sistemas de Segunda Ordem – Tipos de respostas

• Componentes da resposta ao degrau de sistemas de segunda ordem.

1. Decaimento exponencial gerado pela parte real do par de pólos complexos.

2. Oscilação senoidal gerada pela parte imaginária do par de pólos complexos.



4. Resposta no Domínio do Tempo

➢ Sistemas de Segunda Ordem – Formatação geral

• Formulação geral

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

onde:

• ω_n é freqüência de oscilação do sistema sem amortecimento.

• ξ é o coeficiente de amortecimento do sistema, definido como:

Define-se ξ como,

$$\xi = \frac{|\sigma|}{\omega_n}$$

em que:

• σ é a freqüência exponencial de decaimento (rad/s).

ou seja, considere:

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

Sem amortecimento, a Eq. acima se reduz a: $G(s) = \frac{b}{s^2 + b}$

em que: $\omega_n = \sqrt{b} \Rightarrow b = \omega_n^2$

4. Resposta no Domínio do Tempo

- **Sistemas Subamortecido – Caracterização analítica**

Considere a resposta ao degrau de um sistema genérico, dado por:

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2 s+K_3}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

Como ξ <1, em frações parciais, C(s) pode ser dado por:

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{(s+\xi\omega_n)+\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\xi^2)}$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace, obtém-se que:

$$c(t)=1-e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t\right)$$

ou seja: $$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t-\varphi\right)$$

com $\varphi=tg^{-1}(\xi/\sqrt{1-\xi^2})$

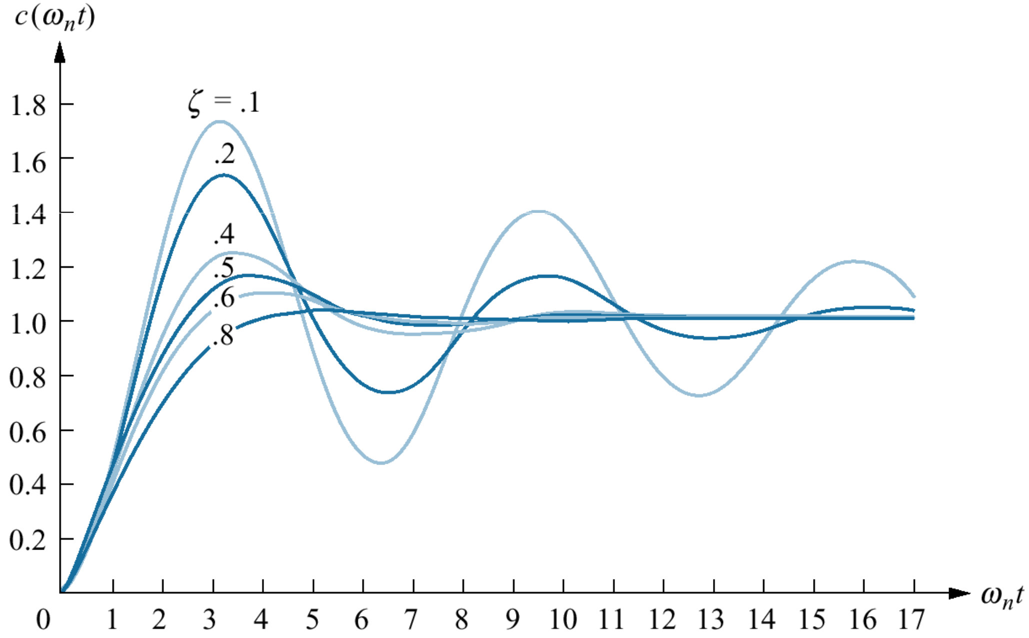
4. Resposta no Domínio do Tempo

➢ Sistemas Subamortecido – Especificações

• Respostas do sistema de 2ª ordem em função do coeficiente de amortecimento.

• Especificações:

1. Instante de pico, Tp;
2. Ultrapassagem percentual, %UP;
3. Tempo de assentamento (regime permanente), Ts;
4. Tempo de subida, Ts.



➢ Cálculo de Tp

Considere:

$$L[\dot{c}(t)] = sC(s) =$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)}$$

4. Resposta no Domínio do Tempo

- **Sistemas Subamortecido – Especificações**
- Cálculo de Tp

Ou seja:

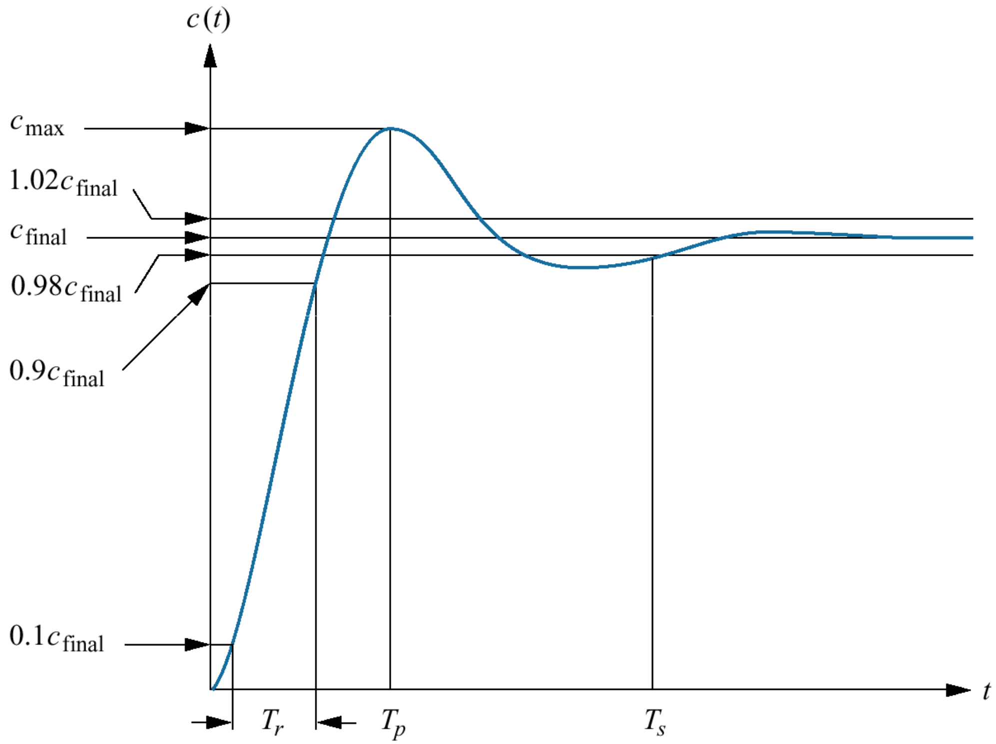
$$= \frac{\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\xi^2)}$$

Portanto:

$$\dot{c}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t\right)$$

Igualando a zero,

$$t = T_p = \frac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$



4. Resposta no Domínio do Tempo

- **Sistemas Subamortecido – Especificações**
- Cálculo de %UP

O percentual de sobre-sinal pode ser dado por:

$$\%UP = \frac{c_{\max} - c_{final}}{c_{final}} \times 100$$

O termo c_{max} é obtido calculando-se c(Tp), assim

$$c_{\max} = c(T_p) = 1 - e^{-(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})}\left(\cos\pi + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\pi\right) = 1 + e^{-(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})}$$

como c_{final} = 1, então:

$$\%UP = e^{-(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})} \times 100$$

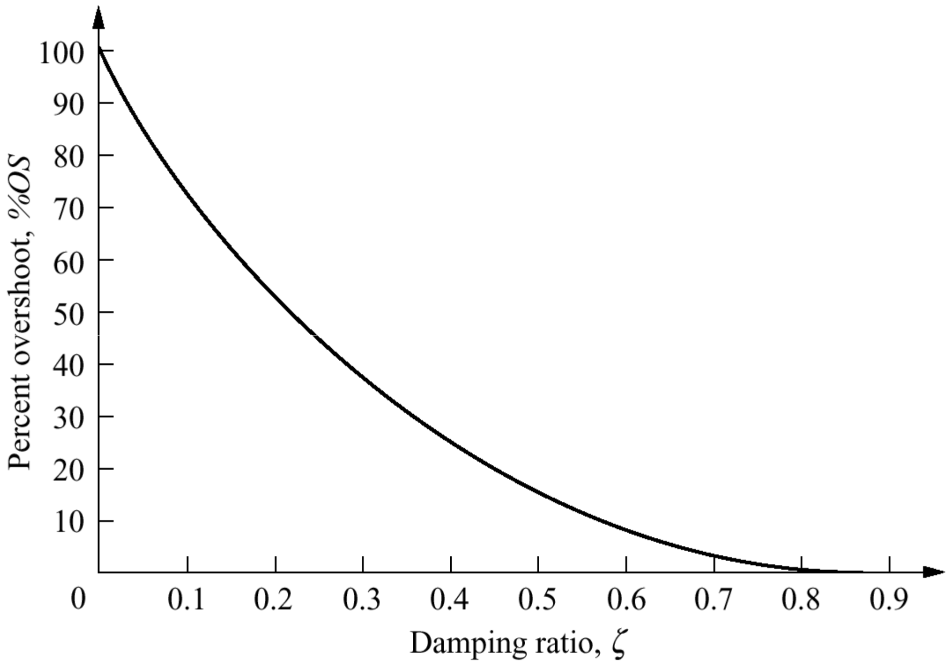
O inverso da expressão acima permite o cálculo de ξ como:

$$\xi = \frac{-\ln(\%UP/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%UP/100)}}$$

4. Resposta no Domínio do Tempo

➢ **Sistemas Subamortecido – Especificações**

Ultrapassagem percentual em função da relação de amortecimento (overshoot).



➢ Cálculo de Ts:

Admitindo-se que Ts ocorre quando o sistema atinge 2% do valor de regime:

$$e^{-\xi\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}=0{,}02$$

Assim pode-se determinar Ts por:

$$T_s=\frac{-\ln(0{,}02\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_n}$$

Pode-se também determinar Ts como: $T_s=\dfrac{4}{\xi\omega_n}$

4. Resposta no Domínio do Tempo

- **Sistemas Subamortecido – Especificações**
- Cálculo de Tr:

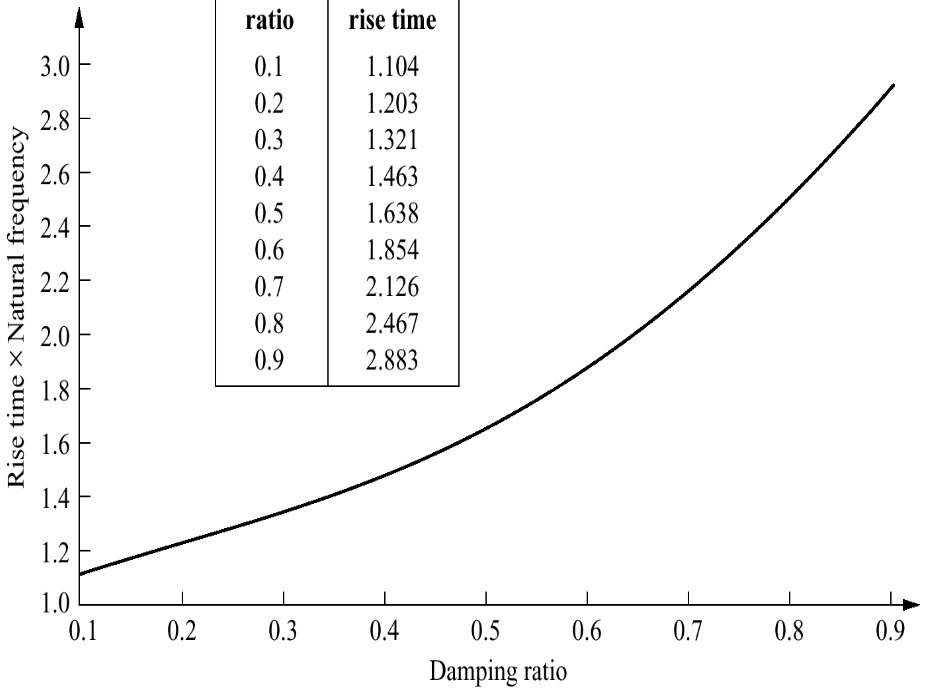
Não é possível determinar uma relação analítica de Tr em função do coeficiente de amortecimento

O tempo de subida pode ser então obtido como segue:

1. Com base no valor de ξ, localiza-se na tabela ou no gráfico, o valor normalizado de Tr.

2. O valor real de Tr é obtido dividindo-se $Tr_{(norm)}$ pelo valor de ω_n.

Damping ratio	Normalized rise time
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883



4. Resposta no Domínio do Tempo

➢ Sistemas Subamortecido – Análise Gráfica

A partir do diagrama de pólos é também possível identificar a planta:

Em que:

1. ω_d é a freqüência amortecida de oscilação.

2. σ_d é a freqüência exponencial amortecida.

3. Por Pitagoras,

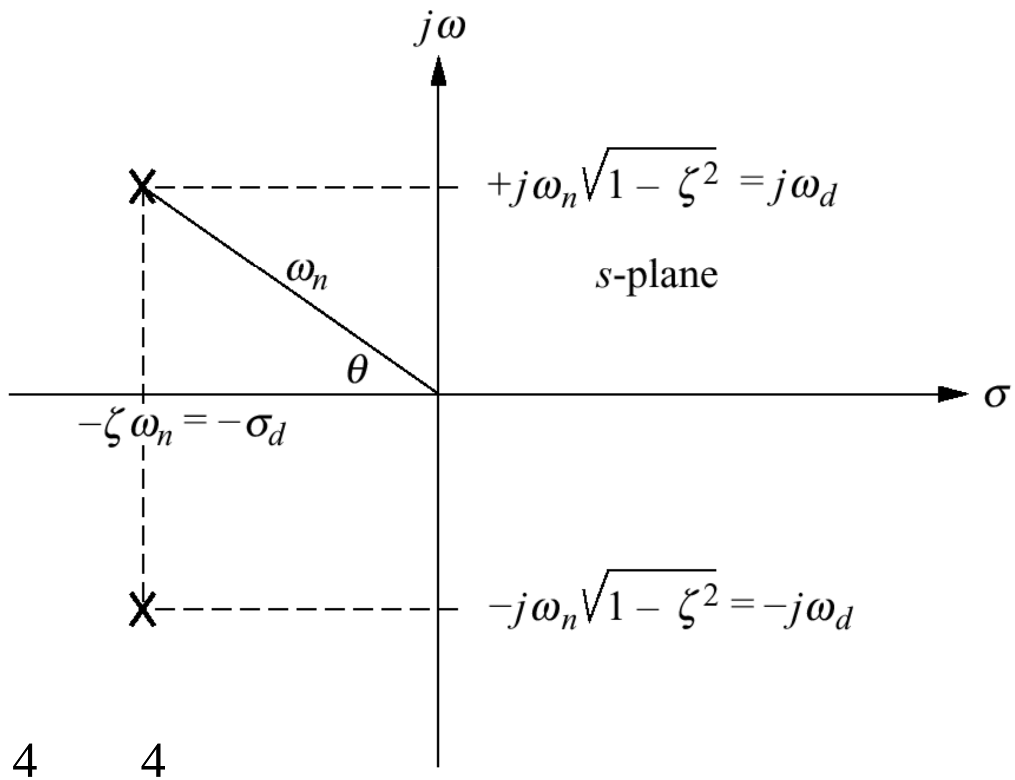
$$\xi = \cos\theta$$

4. Tp pode ser dado por,

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

5. Ts é definido como:

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{\sigma_d}$$



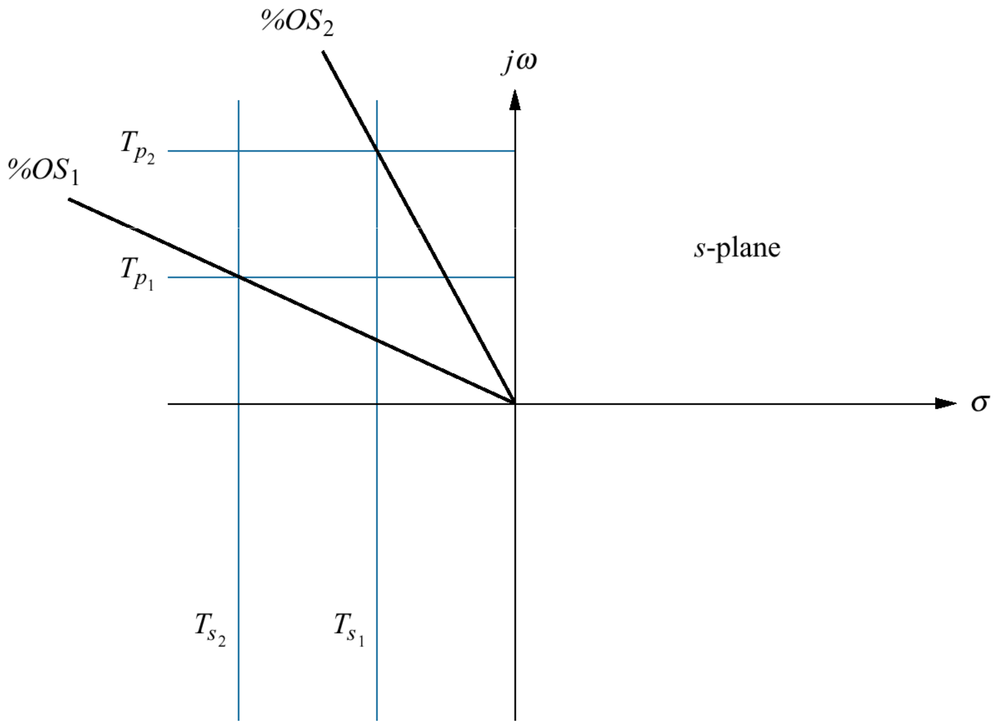
4. Resposta no Domínio do Tempo

➢ Sistemas Subamortecido – Análise Gráfica

Linhas de valores constantes para o tempo de pico, de assentamento de ultrapassagem percentual

Em que:

$$T_{s2} < T_{s1}$$
$$T_{p2} < T_{p1}$$
$$UP_1 < UP_2$$

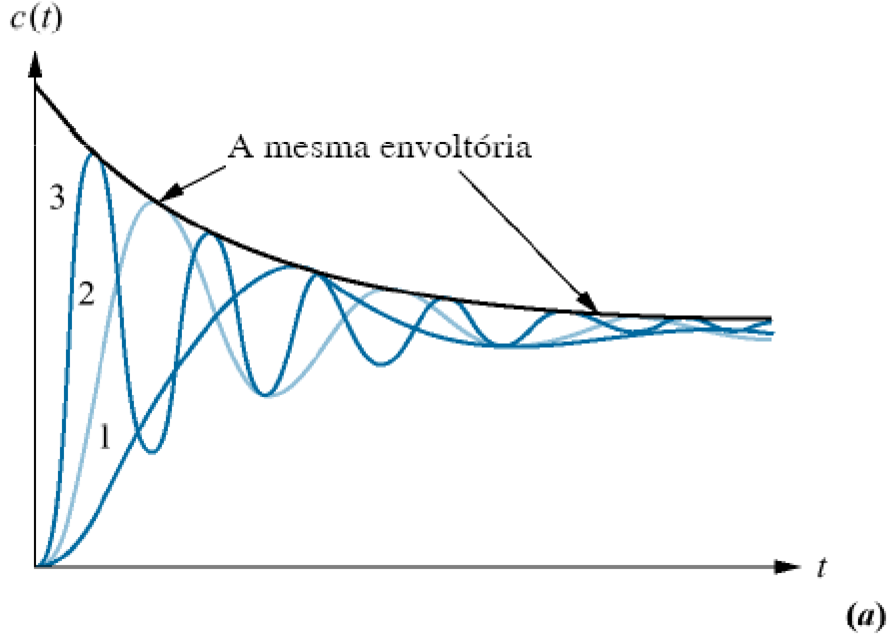


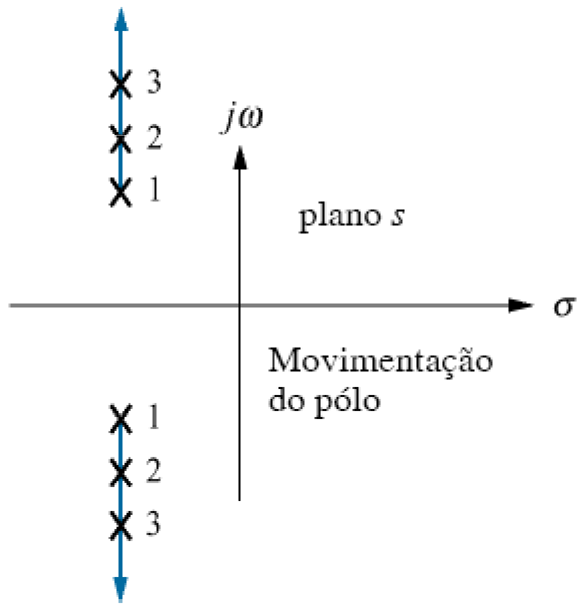
4. Resposta no Domínio do Tempo

- **Sistemas Subamortecido – Análise Gráfica**

Respostas ao degrau em função da movimentação dos pólos

1. Parte real constante:



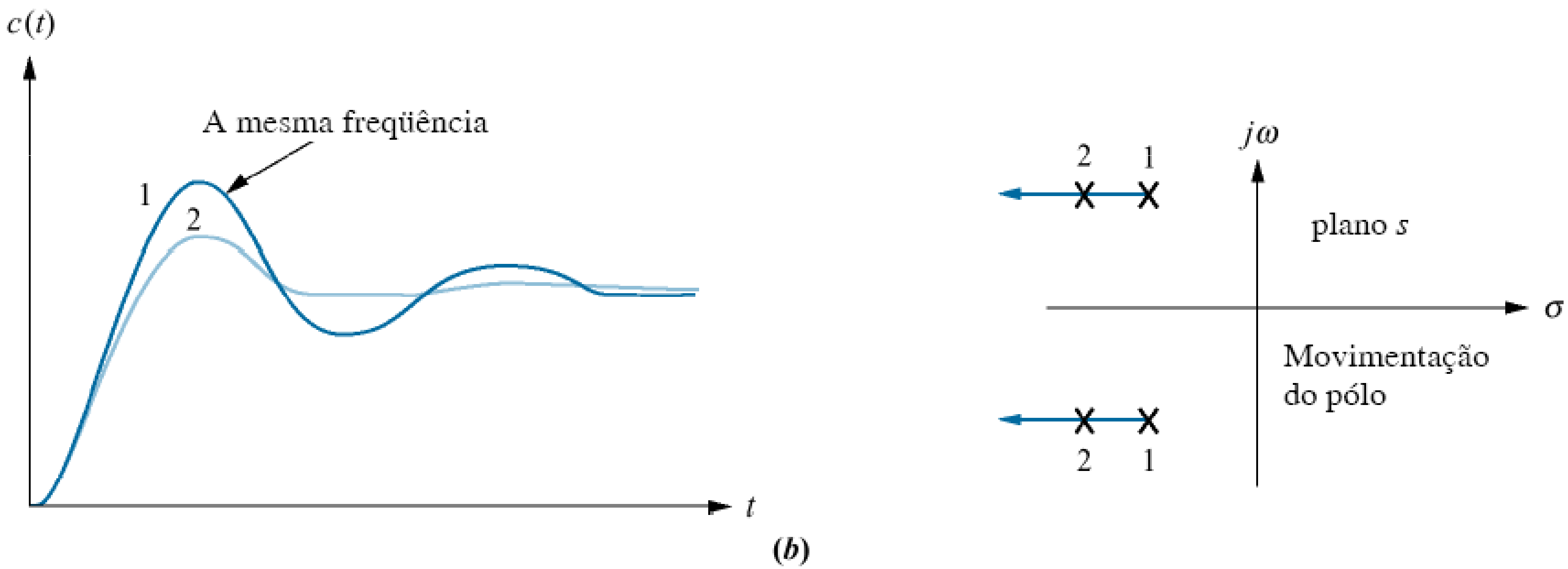


4. Resposta no Domínio do Tempo

- **Sistemas Subamortecido – Análise Gráfica**

  Respostas ao degrau em função da movimentação dos pólos

  2. Parte imaginária constante:

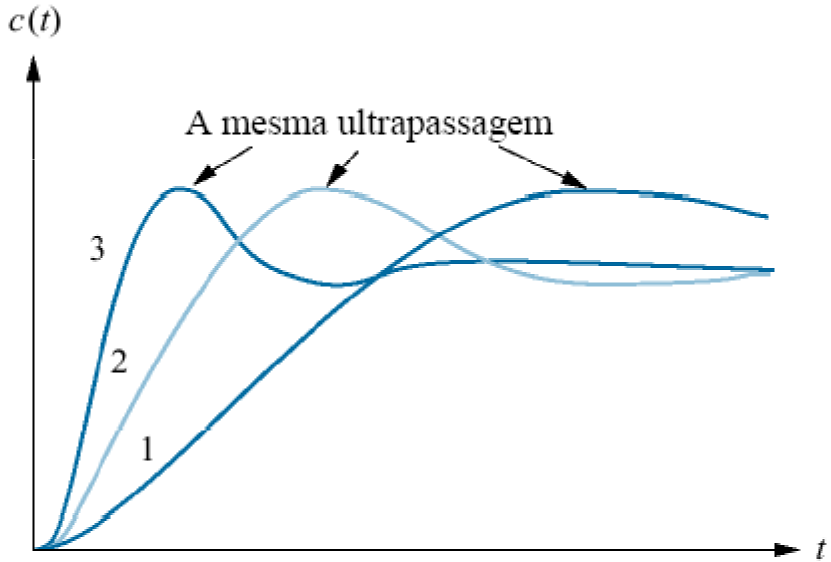


4. Resposta no Domínio do Tempo

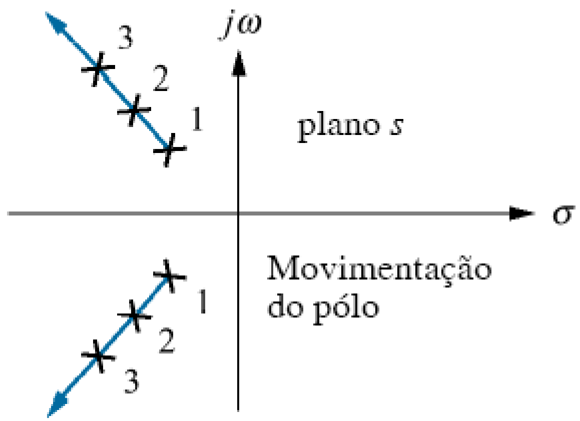
➢ **Sistemas Subamortecido – Análise Gráfica**

Respostas ao degrau em função da movimentação dos pólos

3. Com relação de amortecimento constante:



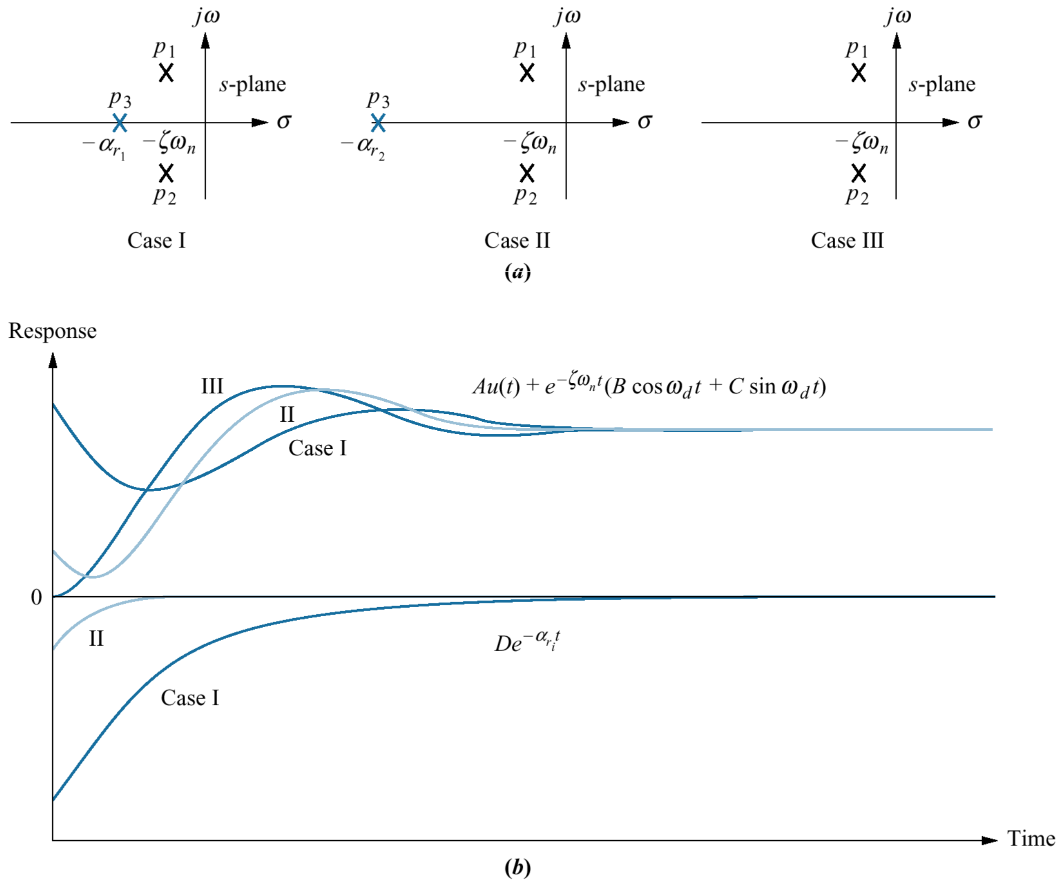
(c)



4. Resposta no Domínio do Tempo

➢ **Sistemas Subamortecido – Pólos Adicionais**

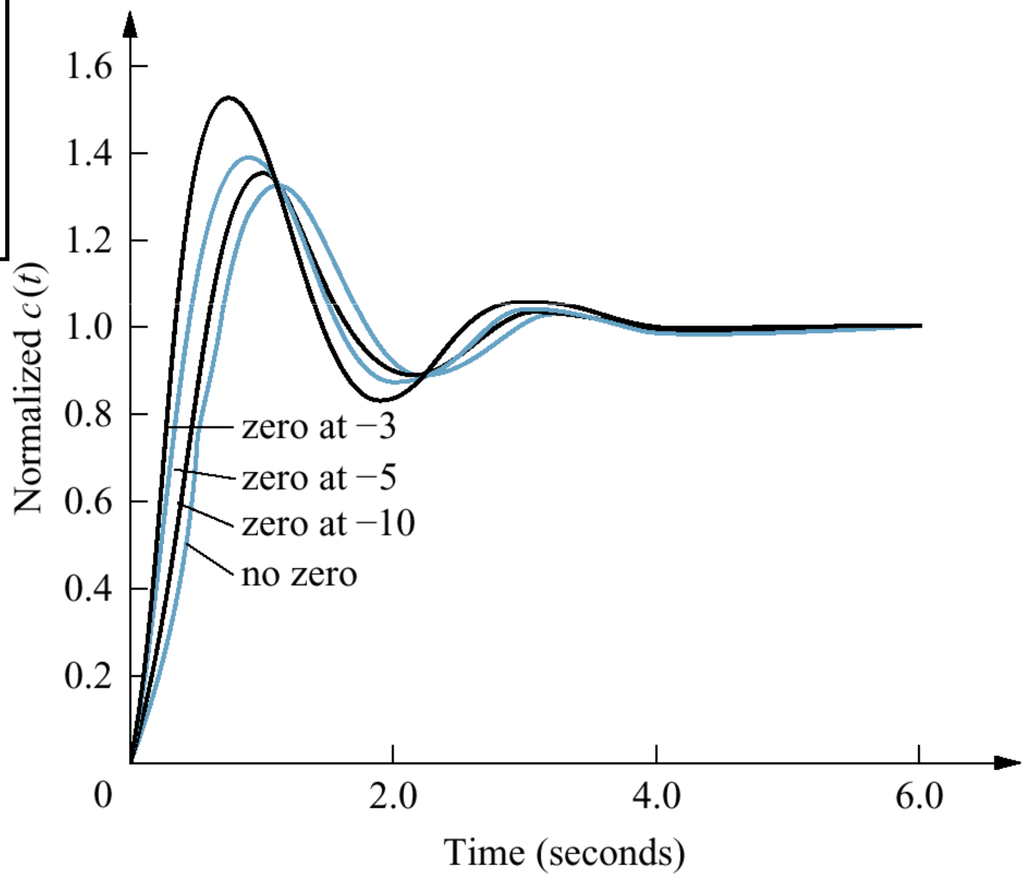
Resposta do sistema com a adição de um pólo ao sistema subamortecido.



4. Resposta no Domínio do Tempo

- **Sistemas Subamortecido – Zeros**

A inclusão de um zero na planta de controle altera basicamente a amplitude da ultrapassagem (overshoot)



4. Resposta no Domínio do Tempo

- **Solução das Equações de Estado**
- Utilizando a Transformada de Laplace

Considere a equação de estado e de saída,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Aplicando a transformada de Laplace na primeira, resulta em:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \Rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Resolvendo para X(s), obtém-se que:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) = \frac{\mathrm{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)]$$

Por Laplace, a saída é dada por:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

Considerando, condições iniciais nulas

$$\frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}\left[\frac{\mathrm{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\right]\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}\,\mathrm{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) + \mathbf{D}\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

4. Resposta no Domínio do Tempo

- **Solução das Equações de Estado**
- Autovalores e pólos da Função de Transferência

Por definição, os autovalores da matriz A é dado por

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$$

Assim, os autovalores da expressão anterior correspondem aos pólos da função de transferência Y(s)/U(s)

- Solução das Equações de Estado no domínio do tempo

Admita, inicialmente, a equação de estado homogênea dada por;

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

Considere uma solução de x, dada pela série;

$$\mathbf{x}(t)=b_0+b_1t+b_2t^2+....+b_kt^k+b_{k+1}t^{k+1}+...$$

Substituindo esta solução na equação de estado homogênea,

$$b_1+2b_2t+....+kb_kt^{k-1}+(k+1)b_{k+1}t^k+...=$$

$$=\mathbf{A}(b_0+b_1t+b_2t^2+....+b_kt^k+b_{k+1}t^{k+1}+...)$$

4. Resposta no Domínio do Tempo

- **Solução das Equações de Estado**
- Solução das Equações de Estado no domínio do tempo

Igualando os termos semelhantes,

$$\mathbf{b_1} = \mathbf{Ab_0},\ \ \mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{Ab}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0,\ \ \ldots, \mathbf{b}_k = \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0,\ \ \ \mathbf{b}_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{b}_0,$$

O que resulta em:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b_0} + \mathbf{Ab_0}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b_0}t^2 + \ldots. + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b_0}t^k + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{b_0}t^{k+1} + \ldots$$

$$= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 + \ldots. + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1}t^{k+1} + \ldots\right)\mathbf{b_0}$$

Mas $\mathbf{x}(0) = b_0$, então

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 + \ldots. + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1}t^{k+1} + \ldots\right)\mathbf{x}(0)$$

Como:

$$e^{\mathbf{A}t} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 + \ldots. + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^{k+1}t^{k+1} + \ldots\right)$$

4. Resposta no Domínio do Tempo

➢ **Solução das Equações de Estado**

➢ Solução das Equações de Estado no domínio do tempo

Então,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

Onde define-se matriz transição de estados,

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0)$$

➢ Propriedades da matriz transição de estados:

Primeira propriedade:

$$\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$$

Como,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

Em t = 0, obtém-se que:

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(0)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0)$$

Segunda propriedade:

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(0) = \mathbf{A}$$

4. Resposta no Domínio do Tempo

- **Solução das Equações de Estado**
- Solução das Equações de Estado no domínio do tempo

Em resumo, a solução do sistema homogêneo é

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0)$$

onde: $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$ e $\dot{\mathbf{\Phi}}(0) = \mathbf{A}$

Resolvendo para o sistema completo,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \Rightarrow e^{-\mathbf{A}t}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Em que,

$$\frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Integrando ambos os lados:

$$[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)]\big|_0^t = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Em t = 0,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

4. Resposta no Domínio do Tempo

➢ **Resposta de Sistemas com Fase não Mínima**

Seja C(s) a resposta de um sistema T(s), com numerador unitário. Se adicionarmos um zero (s + a)T(s), a resposta será

$$(s+a)C(s) = sC(s) + aC(s)$$

Assim para o sistema dado por:

$$C(s) = -\frac{(s-10)}{s(s+10)} = -\frac{1}{(s+10)} + 10\frac{1}{s(s+10)}$$

ou seja, $C(s) = sC_o(s) - 10C_o(s)$

onde: $C_o(s) = -\dfrac{1}{s(s+10)}$

Expandindo em frações parciais:

$$C(s) = -\frac{1}{(s+10)} + 10\frac{1}{s(s+10)} = -\frac{1}{(s+10)} + \frac{1}{s} - -\frac{2}{(s+10)}$$

4. Resposta no Domínio do Tempo

➢ **Resposta de Sistemas com Fase não Mínima**

Aplicando a transformada inversa, obtém-se que:

$$c(t) = -e^{-10t} + 1 - e^{-10t} = 1 - 2e^{-10t}$$

Além disso, $C_o(s) = -\dfrac{1}{s(s+10)} = -\dfrac{1/10}{s} + \dfrac{1/10}{(s+10)}$

Cuja resposta no domínio do tempo é

$$c(t) = -\frac{1}{10} + \frac{1}{10}e^{-10t}$$