2 FLUXO ELÉTRICO E LEI DE GAUSS

Ao final deste capítulo você deverá ser capaz de:

- Entender e descrever a Experiência de Faraday, que originou a definição de fluxo elétrico e densidade de fluxo elétrico
- Definir a grandeza escalar fluxo elétrico.
- Definir a grandeza vetorial Densidade de fluxo elétrico.
- Relacionar o vetor intensidade de campo elétrico com o vetor densidade de fluxo elétrico.
- Enunciar a lei de Gauss.
- Identificar a simetria dos problemas, definir o sistema de coordenadas mais apropriado e escolher superfícies gaussianas adequadas.
- Encontrar expressões para o vetor intensidade de campo elétrico e para o vetor densidade de fluxo elétrico para configurações especiais de carga.
- Calcular o fluxo elétrico que atravessam superfícies, fechadas ou não.

2.1 - DENSIDADE DE FLUXO ELÉTRICO - A EXPERIÊNCIA DE FARADAY

Em 1837 M. Faraday estudando o problema de campos eletrostáticos realizou a seguinte experiência: tomou duas esferas concêntricas, uma menor de raio a, e outra formada por dois hemisférios de raio b, b > a. A esfera interna foi carregada com uma carga conhecida de Q Coulombs positivos. Os hemisférios foram presos entre si, em torno da esfera menor, com o espaço entre elas preenchido por um material isolante. A esfera externa foi então cuidadosamente removida. Faraday percebeu que na esfera externa fora induzida uma carga negativa de magnitude igual à da esfera interna.

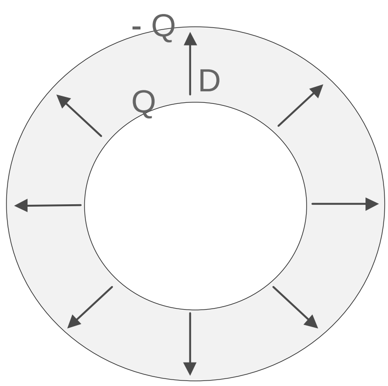


fig. 2.1- Configuração da experiência de Faraday

O valor da carga induzida não dependia do tipo do material isolante utilizado. Faraday denominou esse fenômeno de **fluxo de deslocamento**, **deslocamento**, ou simplesmente **fluxo elétrico**.

As setas que saem da esfera com carga positiva, para a esfera com carga negativa receberam o nome de **linhas de força**, ou **linhas de fluxo**. Denominando o fluxo elétrico por ϕ, a experiência de Faraday mostrou que:

$$\phi = Q \quad (C) \tag{2.1}$$

Portanto, a unidade de fluxo elétrico é também o Coulomb. Sabendo que a carga Q estava distribuída uniformemente sobre a superfície da esfera interna, e que a sua área é $4\pi a^2$, Faraday descobriu que a **densidade de fluxo elétrico** nesta superfície era $Q/4\pi a^2$ (C/m^2). Para a esfera externa, o valor da densidade de fluxo seria $Q/4\pi b^2$ (C/m^2).

A densidade de fluxo elétrico é uma grandeza vetorial, definida pelo símbolo $\vec{D}$. A direção de $\vec{D}$ em um ponto é a direção das linhas de fluxo que atravessam a superfície tangente a esse ponto. Para uma superfície imaginária com raio r, ela pode ser expressa vetorialmente como:

$$\vec{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}.\hat{a}_r \ \ (C/m^2) \tag{2.2}$$

Imagine agora que a esfera menor seja substituída por uma carga pontual Q Coulombs, situada no centro. Como as linhas de fluxo são sempre radiais, a densidade de fluxo elétrico na superfície imaginária não deve se alterar.

Relembrando a expressão para vetor intensidade de campo elétrico devido à uma carga pontual no espaço livre:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}.\hat{a}_r \ \ (N/C) \tag{2.3}$$

podemos concluir que:

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E} \ \ (C/m^2) \tag{2.4}$$

Embora esta expressão tenha sido obtida a partir de expressões para o vetor intensidade de campo elétrico e densidade de fluxo gerados a partir de uma carga pontual, esta relação é válida para qualquer ponto do espaço, e para qualquer configuração de cargas.

Fixando e memorizando ...

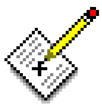
Em seu caderno de estudos, execute as seguintes atividades:

1. Descreva a Experiência de Faraday.
2. Qual foi a sua descoberta ?
3. O que são linhas de fluxo ?
4. O que é densidade de fluxo ?
5. Expresse vetorialmente a densidade de fluxo.
6. Relacione o vetor intensidade de campo elétrico com o vetor densidade de fluxo elétrico

2.2 - A LEI DE GAUSS

Pela experiência de Faraday podemos perceber facilmente que 1 C de fluxo elétrico que atravessa uma superfície fechada qualquer é produzido por 1 C de carga, independente da geometria da superfície atravessada, e do volume que contém a carga. Obviamente a densidade de fluxo varia de uma configuração para outra, mas o fluxo total permanece constante.

Tudo isso pode ser generalizado num simples enunciado, conhecido como a Lei de Gauss.



O fluxo elétrico que atravessa qualquer superfície fechada é igual à carga total envolvida por essa superfície (Lei de Gauss).

Na verdade o trabalho de Gauss consistiu na formulação matemática do enunciado acima, que já era conhecido então.

Imagine uma distribuição de cargas, envolvida por uma superfície fechada S (fig 2.2).

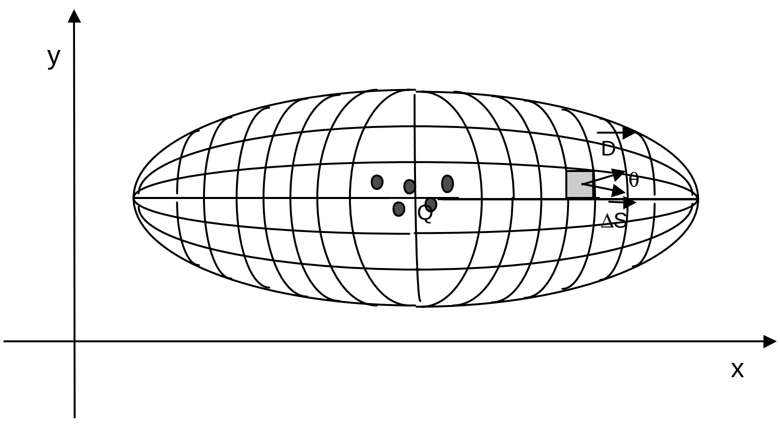


fig. 2.2 - Distribuição de cargas e Superfície Gaussiana.

Vamos agora tomar um incremento de superfície $\Delta\vec{S}$. Como esse elemento incremental de área é muito pequeno, ele pode ser considerado como sendo plano. Contudo, ele terá uma orientação no espaço, que será dada pelo vetor perpendicular ao plano que tangencía a superfície S neste ponto (centro de $\Delta\vec{S}$). Portanto, $\Delta\vec{S}$ é uma grandeza vetorial. A densidade de fluxo que atravessará $\Delta\vec{S}$ é $\vec{D}_s$ e, genericamente, fará um ângulo θ com $\Delta\vec{S}$.

O fluxo que atravessa $\Delta\vec{S}$ será, então:

$$\Delta\phi = \vec{D}_s . \Delta\vec{S} = D_s \Delta S \cos\theta \text{ (C)} \qquad (2.5)$$

$\Delta\phi$ é uma grandeza escalar, resultante do produto escalar entre os vetores $\vec{D}_s$ e $\Delta\vec{S}$.

O fluxo total que atravessa a superfície fechada S será, então.

$$\phi = \int d\phi = \oint_s \vec{D}_s . d\vec{S} \text{ (C)} \qquad (2.6)$$

A integral resultante é uma integral de superfície fechada (daí o símbolo $\oint$) e, portanto, uma integral dupla. Esta superfície é frequentemente chamada de **Superfície Gaussiana.**

A Lei de Gauss é então matematicamente formulada como:

$$\oint_s \vec{D}_s . d\vec{S} = Q \text{ (C)} \qquad (2.7)$$

A carga envolvida pode ser de qualquer tipo: cargas pontuais discretas, linhas de cargas, distribuição superficial de cargas ou uma distribuição volumétrica de cargas. Como essa última engloba genericamente todos os outros tipos, a Lei de Gauss pode ser expressa em função de uma distribuição de cargas:

$$\oint_s \vec{D}_s . d\vec{S} = \int_v \rho_v dv \text{ (C)} \qquad (2.8)$$

Na equação 2.8, a integral da direita pode ser substituída por cargas pontuais, integral de linha de uma densidade linear de cargas, integral de superfície de uma densidade superficial de cargas, e até mesmo combinação destes casos.

Fixando e memorizando ...

Em seu caderno de estudos, execute as seguintes atividades:

1. Enuncie a Lei de Gauss.
2. Equacione a Lei e Gauss.
3. O que é uma superfície gaussiana ?

Exemplo 2.1

Calcular o fluxo que atravessa a superfície de uma esfera de raio a metros, produzido por uma carga elétrica **Q** Coulombs, colocada no centro dessa esfera.

Solução

Sabemos que na superfície de uma esfera de raio a, a densidade de fluxo elétrico é:

$$\vec{D}_s = \frac{Q}{4\pi a^2}.\hat{a}_r \ \ (C/m^2)$$

O elemento diferencial de área em coordenadas esféricas, na superfície de uma esfera de raio a é:

$$d\vec{S} = r^2 \operatorname{sen}\theta d\phi d\theta = a^2 \operatorname{sen}\theta d\phi d\theta.\hat{a}_r$$

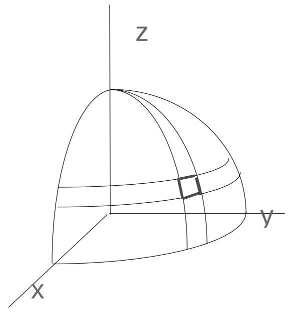


fig. 2.3 - Elemento diferencial de área

O produto $\vec{D}_s.\Delta\vec{S}$ é:

$$\left(\frac{Q}{4\pi a^2}.\hat{a}_r\right)\left(a^2 \operatorname{sen}\theta d\phi d\theta.\hat{a}_r\right) = \frac{Q}{4\pi}\operatorname{sen}\theta d\phi d\theta$$

A integral de superfície será:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Q}{4\pi}\operatorname{sen}\theta d\phi d\theta$$

Os limites de integração foram escolhidos de modo que a integração fosse realizada sobre a superfície uma única vez. Integrando primeiro em relação a ϕ e em seguida em relação a θ:

$$\int_0^{\pi}\frac{Q}{2}\cos\theta d\theta = \frac{Q}{2}\cos\theta\Big|_0^{\pi} = Q \qquad (C)$$

Ficando pois comprovado que:

$$\oint_s \vec{D}_s.d\vec{S} = Q \ \ (C)$$

Refaça este exemplo ...

Em seu caderno de estudos refaça este exemplo, seguindo os seguintes passos:

1. Escreva a expressão para o vetor densidade de fluxo elétrico, para uma carga pontual.
2. Expresse o elemento diferencial de superfície adequado para este exemplo..
3. Faça o produto escalar entre o vetor densidade de fluxo elétrico e o elemento diferencial de superfície.
4. Integre o resultado obtido no passo 3, sobre a superfície da esfera.

Exemplo 2.2

Calcular o fluxo elétrico total que atravessa a superfície esférica com raio r = 10 m, sendo que a distribuição de carga é composta por uma linha de cargas ao longo do eixo z, definida por $\rho_l = 2e^{2|z|}$ C/m na região $-2 \leq z \leq 2$ m e $\rho_l = 0$ no restante.

Solução

Existem duas maneiras de se resolver este problema:

Se você adora resolver integrais complicadas pode encontrar uma expressão para o campo elétrico em um ponto qualquer da superfície de raio r (o que já se constitui num trabalho de integração um tanto complexo), e novamente integrá-la em toda a superfície (outro tremento trabalho de integração).

Se você não tem tanta aptidão assim para integrais complexas, e já entendeu o conceito da lei de Gauss, pode simplesmente integrar a função da densidade linear de cargas ao longo de z, de -2 a 2 m. A lei de Gauss garante que os resultados serão os mesmos.

Então:

$$Q = \int_{-2}^{2} 2e^{2|z|} dz \ \ (C)$$

Como a função módulo não é contínua, vamos dividir a integral acima em duas integrais:

$$Q = \int_{-2}^{0} 2e^{-2z} dz + \int_{0}^{2} 2e^{2z} dz \ (C)$$

$$Q = -e^{-2z}\Big|_{-2}^{0} + e^{2z}\Big|_{0}^{2}$$

$$Q = -1 + e^{4} + e^{4} - 1 = 107{,}19 \ \ (C)$$

Portanto, o fluxo que atravessa a superfície fechada r = 10 m, para essa distribuição de cargas é 107,9 C.

Exemplo 2.3

Considere uma linha infinita de cargas. Utilizando a Lei de Gauss encontre a expressão para o vetor intensidade de campo elétrico.

Solução

De discussões anteriores sobre o campo elétrico produzido por uma linha de cargas, sabemos que o ele é radial e só varia com o raio r.

Portanto :

$$\vec{D} = D_r.\hat{a}_r \quad (C/m^2)$$

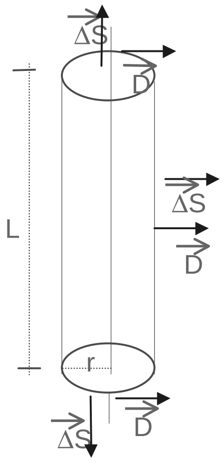


fig. 2.3 - Superfície gaussiana em torno de uma linha de cargas

A superfície gaussiana escolhida então é um cilindro de raio r e comprimento L.

Para aplicarmos a lei de Gauss, essa superfície será dividida em 3 superfícies: a lateral do cilndro propriamente dito, o topo e a base.

$$Q = \oint \vec{D}.d\vec{S} = \int_{lado} + \int_{topo} + \int_{base}$$

Como o campo elétrico só possui a componente radial, o produto escalar entre o elemento de superfície e o vetor densidade de fluxo para as integrais no topo e na base da superfície gaussiana será nulo. Portanto:

$$Q = \oint \vec{D}.d\vec{S} = D\int_{lado} dS$$

$$Q = D\int_0^L r d\phi dz = D2\pi L$$

$$D = \frac{Q}{2\pi rL} = \frac{\rho_l}{2\pi r} \quad (C/m^2)$$

$$\vec{E}=\frac{D}{\varepsilon_0}.\hat{a}_r=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}.\hat{a}_r \ \ (N/C)$$

Este exemplo comprova que o campo elétrico produzido por uma linha infinita de cargas tem comportamento radial, e varia inversamente com a distância do ponto à linha de cargas.

Refaça este exemplo ...

Em seu caderno de estudos refaça este exemplo, seguindo os seguintes passos:

1. Escolha uma superfície gaussiana adequada.
2. Subdivida esta superfície fechada em outras superfícies abertas.
3. Identifique em quais superfícies a integral será nula, explicando por quê.
4. Na superfície que restou, como é o comportamento do módulo do campo elétrico ? Constante ? Variável ?
5. Expresse o elemento diferencial de superfície em coordenadas cilíndricas.
6. Realize o produto escalar entre o vetor densidade de fluxo elétrico e o elemento diferencial de superfície.
7. Calcule a integral, e encontre o módulo do vetor densidade de fluxo.
8. Expresse o vetor densidade de fluxo e/ou o vetor intensidade de campo elétrico.

Exemplo 2.4

Encontrar a expressão para o campo elétrico produzido por uma distribuição superficial infinita de cargas.

Solução:

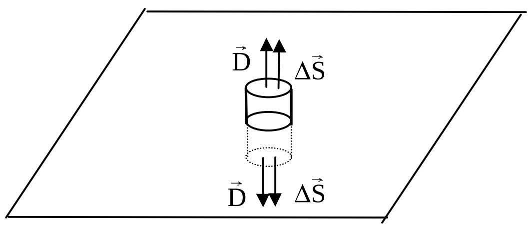


fig. 2.4 - superfície gaussiana para uma distribuição superficial de cargas.

Da discussão do capítulo anterior, o campo elétrico produzido por uma distribuição superficial infinita de cargas terá apenas a componente na direção normal a esta superfície.
A superfície gaussiana utilizada será um pequeno cilindro, de altura h e área de base ΔS. A metade dele estará acima da superfície, e a outra metade abaixo.
Novamente dividiremos esse essa superfície fechada em 3 superficies abertas distintas, a saber, o topo a base e a lateral do cilindro. Como o campo elétrico não possui componente paralela à superfície, a integral na superfície lateral será nula. Portanto:

$$Q=\oint\vec{D}.d\vec{S}=0\int_{lado}dS+D\int_{topo}dS+D\int_{base}dS$$

$$\rho_s \Delta S = D\Delta S + D\Delta S$$

$$D = \frac{\rho_s}{2}$$

$$\vec{D} = \frac{\rho_s}{2}\hat{a}_n \;;\; \vec{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\hat{a}_n$$

Refaça este exemplo ...

Em seu caderno de estudos refaça este exemplo, seguindo os seguintes passos:

1. Escolha uma superfície gaussiana adequada.
2. Subdivida esta superfície fechada em outras superfícies abertas.
3. Identifique em qual superfícies a integral será nula, explicando por quê.
4. Nas superfícies que restaram, como é o comportamento do módulo do campo elétrico ? Constante ? Variável ?
5. Realize o produto escalar entre o vetor densidade de fluxo elétrico e o elemento diferencial de superfície.
6. Encontre o módulo do vetor densidade de fluxo.
7. Expresse o vetor densidade de fluxo e/ou o vetor intensidade de campo elétrico vetorialmente.

Por este exemplo chegamos à conclusão (a princípio absurda) de que o campo elétrico provocado por uma distribuição superficial de cargas não depende da distância do ponto à superfície. Não se esqueça de que este raciocínio foi feito para uma distribuição infinita de cargas, que não existe na prática. Uma distribuição superficial finita de cargas pode ser considerada como infinita se a distância do ponto de interesse à distribuição superficial de cargas for muito pequena, comparada com as dimensões da mesma. Para pontos mais distantes, a distribuição não pode ser considerada infinita, e a expressão acima não é mais válida.

`Exemplo 2.5`

Dois condutores cilíndricos coaxiais, para efeitos práticos são considerados como sendo infinitos. O interno é maciço, de raio **a** m. O externo possui raio interno **b** m e raio externo **c** m. Uma carga de densidade ρ_S C/m^2 é colocada na superfície do condutor interno. Avaliar o campo elétrico a partir da origem até r > c.

Solução

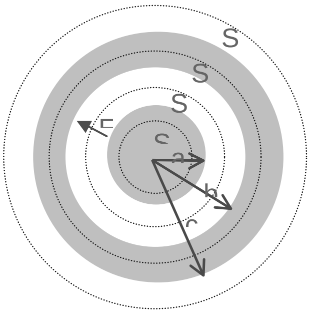


Fig. 2.5 - Superfícies Gaussianas em um cabo coaxial

Superfícies gaussianas cilíndricas de comprimento L são traçadas. A primeira delas possui um raio r < a. Portanto:

$$Q=\oint \vec{D}.d\vec{S}=0$$

$\vec{\mathbf{E}}$ = 0 no interior do cilindro interno.

A segunda superfície gaussiana possui um raio a < r < b.

$$\oint \vec{D}.d\vec{S}=\int_s \rho_s dS$$

A primeira integral é calculada sobre a superfície gaussiana, e a segunda sobre a superfície do condutor interno. Portanto:

$$D\int_0^L\int_0^{2\pi} r d\phi dz=\rho_s\int_0^L\int_0^{2\pi} a d\phi dz$$

$$D2\pi rL=\rho_s\, 2\pi aL$$

$$D=\rho_s\frac{a}{r}\ (C/m^2)$$

Se a carga for expressa em unidade de comprimento:

$$Q=2\pi aL\rho_s$$

$$\rho_l=2\pi a\rho_s$$

$$D=\frac{\rho_l}{2\pi r}\ (C/m^2)$$

$$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}.\hat{a}_r\ (N/C)$$

que é semelhante a expressão para uma linha de cargas.

A terceira superfície gaussiana é um cilindro com raio r, tal que a < r < c. A carga interna ρ_S induz uma carga de igual magnitude na superfície interna do condutor externo. Portanto a carga envolvida pela superfície gaussiana é:

$$\rho_l L-\rho_l L=0$$

Portanto:

$$\oint \vec{D}.d\vec{S}=0$$

ou seja, o campo elétrico é nulo no interior do cilindro externo.

Tomemos agora uma quarta superfície gaussiana de raio r > c. A carga negativa induzida na superfície interna do condutor externo por sua vez induz uma carga positiva de mesma magnitude na superfície externa do condutor externo. Portanto:

$$\oint \vec{D}.d\vec{S}=Q$$

$$\oint \vec{D}.d\vec{S}=\int \rho_{s3} dS$$

$$D2\pi rL=\rho_{s3}\, 2\pi cL$$

$$D=\rho_{s3}\frac{c}{r}\ (C/m^2)$$

Como as cargas induzidas são iguais:

$$\rho_{s1}\,2\pi aL = \rho_{s2}\,2\pi bL$$

$$\rho_{s3}\,2\pi cL = \rho_{s2}\,2\pi bL$$

$$\rho_{s3}c = \rho_{s2}b = \rho_{s1}a$$

$$D_{ext} = \rho_{s1}\frac{a}{r} = \frac{\rho_l}{2\pi r}\ (C/m^2)$$

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\vec{D}_{ext}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}.\hat{a}_r\ (N/C)$$

Esta é a mesma expressão para o campo produzido pelo condutor interno. Em outras palavras, para pontos r > c a presença ou não do condutor externo não apresenta nenhuma influência sobre campo elétrico produzido pela distribuição de cargas do condutor interno.

Graficamente:

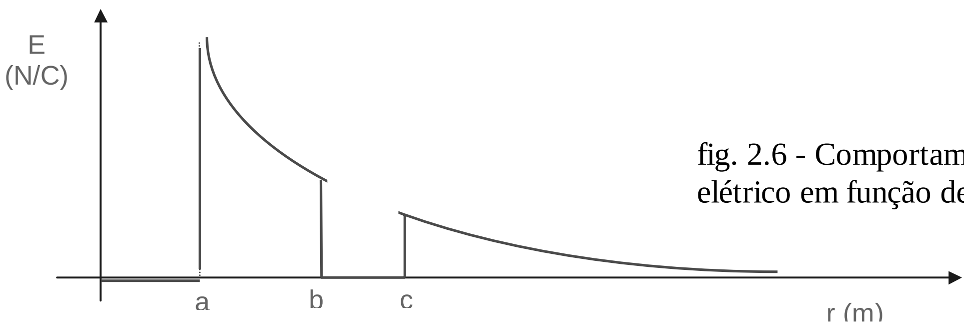


fig. 2.6 - Comportamento do campo elétrico em função de r.

Pelos exemplos que acabamos de resolver, podemos concluir que:

Somente o conhecimento da simetria do problema nos permite escolher superfícies gaussianas adequadas.

O não conhecimento dessa simetria torna a solução do problema pela Lei de Gauss extremamente complicada.

Problemas que não possuem simetria conhecida são resolvidos de uma forma um pouco diferente, como será visto no próximo capítulo.

EXERCÍCIOS

1)- O eixo *z* de um sistema de coordenadas retangulares contém uma distribuição uniforme de cargas, com densidade ρ_l = 50 nC/m. Calcule o campo Elétrico $\vec{E}$ em (10,10,25) m, expressando-o em coordenadas cartesianas e cilíndricas.

2)- Existem duas configurações lineares de carga, com densidades iguais, ρ_l = 6 nC/m, paralelas ao eixo *z*, localizadas em x = 0 m , y = ±6 m. Determine o campo elétrico $\vec{E}$ em (-4,0,z) m.

3) - O plano $3x + y - 6z = 6$ m contém uma distribuição uniforme de cargas com densidade ρ_S $= 0{,}6$ C/m^3. Calcule o campo elétrico $\vec{E}$ relativo ao semi-espaço que contém a origem.

4) - Uma película infinita com densidade uniforme $\rho_S = (10^{-9}/6\pi)$ C/m^3 está localizada em $z = -5$ m. Outra película com densidade $\rho_S = (-10^{-9}/6\pi)$ C/m^3 está localizada em $z = 5$ m . Calcule a densidade linear uniforme, ρ_l , necessária para produzir o mesmo valor de $\vec{E}$ em (5,3,3) m, supondo que esta última se localize em $z = 0$, $y = 0$.

5) - Uma certa configuração engloba duas distribuições uniformes de cargas. Uma película com $\rho_S = -60$ nC/m^2, em $y = 3$ m, e uma reta uniformemente carregada com $\rho_l = 0{,}5$ μC/m, situada em $z = -3$ m, $y = 3$ m. Em que ponto o campo $\vec{E}$ será nulo ?

6) - Um anel circular eletricamente carregado, com raio 4 m, está no plano $z = 0$, com centro localizado na origem. Se a sua densidade uniforme for $\rho_l = 16$ nC/m, calcular o valor de uma carga pontual Q , localizada na origem, capaz de produzir o mesmo campo elétrico em (0,0,5) m.

7) - Calcule a carga contida no volume definido por $2 \le r \le 3$ m, $0 \le \phi \le \pi/3$, $0 \le z \le 4$ m, dada a densidade de cargas $\rho = 3z\operatorname{sen}^2\phi$ C/m^3.

8) - Uma superfície fechada S envolve uma distribuição linear finita de cargas definida por $0 \le L \le \pi$ m, com densidade de cargas $\rho_l = -\rho_0 \operatorname{sen}(L/2)$ C/m. Qual é o fluxo total que atravessa a superfície S ?

9) - Na origem de um sistema de coordenadas esféricas existe uma carga pontual Q C. Uma carga (Q'- Q) C está uniformemente distribuída sobre uma casca esférica de raio a m. Qual é o fluxo elétrico que atravessa a superfície esférica de raio k m, para k < a e k > a ?

10) - Uma área de 40,2 m^2 sobre a superfície de uma carga esférica de raio 4 m é atravessada por um fluxo de 15 μC de dentro para fora. Quanto vale a carga pontual localizada na origem do sistema relacionado a tal configuração esférica ?

11) - Uma carga pontual Q = 6 nC está localizada na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Quanto vale o fluxo Ψ que atravessa a porção do plano $z = 4$ m limitada por $-6 \le y \le 6$ m; $-6 \le x \le 6$ m ?

12) - Dado que $\vec{D} = 30e^{\frac{-r}{b}} a_r - 2\frac{z}{b} a_z \, (C/m^2)$ em coordenadas cilíndricas, calcule o fluxo total que sai da superfície de um cilindro circular reto descrito por r = 2b m, z = 0, z = 5b m.

13) - Sobre a origem de um sistema de coordenadas esféricas existe uma carga pontual Q = 1500 pC. Uma distribuição esférica concêntrica de cargas de raio r = 2 m tem uma densidade $\rho_S = 50\pi$ pC/m^2. Quanto deve valer a densidade de cargas de uma outra superfície esférica, r = 3 m, concêntrica, para resultar em D = 0 para r > 3 m .