3 DIVERGÊNCIA DO FLUXO ELÉTRICO E TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Ao final deste capítulo você deverá ser capaz de:

- Entender o que é a Divergência de um vetor
- Obter e entender a expressão para a forma diferencial da Lei de Gauss.
- Expressar a lei de Gauss utilizando o operador ∇.
- Entender e utilizar o Teorema da Divergência.

3.1 - A LEI DE GAUSS APLICADA A UM ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUME

No capítulo 2 vimos que a Lei de Gauss permite estudar o comportamento do campo elétrico devido a certas distribuições especiais de carga. Entretanto, para ser utilizada, a Lei de Gauss exige que a simetria do problema seja conhecida, de forma a resultar que a componente normal do vetor densidade de fluxo elétrico em qualquer ponto da superfície gaussiana seja constante ou nula.

Neste capítulo pretendemos considerar a aplicação da Lei de Gauss a problemas que não possuem nenhum tipo de simetria. Suponhamos um volume Δv extremamente pequeno, porém finito. Se assumirmos uma densidade de carga uniforme neste volume, a carga ΔQ será o produto da densidade de carga ρ pelo volume Δv. Pela Lei de Gauss, podemos escrever:

$$\oint \vec{D}.d\vec{S} = \Delta Q = \rho \Delta V \ \text{(C)} \qquad (3.1)$$

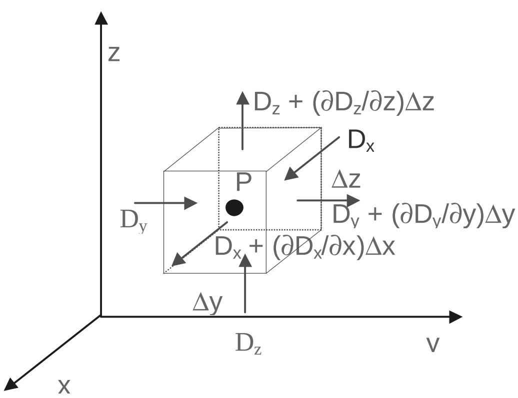

fig. 3.1 - Volume incremental em torno do ponto P.

Vamos agora desenvolver a integral de superfície da equação acima, sobre uma superfície gaussiana elementar que engloba o volume Δv**.** Este volume está representado na figura 3.1, e é formado por superfícies incrementais $\Delta x.\Delta y$, $\Delta y.\Delta z$, e $\Delta z.\Delta x$.

Considere um ponto P(x,y,z) envolvido pela superfície gaussiana formada pelas superfícies incrementais . A expressão para $\vec{D}$ no ponto P, em coordenadas cartesianas é:

$$\vec{D} = D_{x0}.\hat{a}_x + D_{y0}.\hat{a}_y + D_{z0}.\hat{a}_z \tag{3.2}$$

A integral sobre a superfície fechada é dividida em seis integrais, uma sobre cada lado do volume Δv.

$$\oint \vec{D}.d\vec{S} = \int_{frente} + \int_{atrás} + \int_{esq.} + \int_{dir.} + \int_{topo} + \int_{base} \tag{3.3}$$

Como as superfícies são extremamente pequenas, cada integral acima pode ser substituída pelo produto escalar entre uma componente do vetor densidade de fluxo elétrico e um vetor $\Delta\vec{S}$, apontando na direção da componente escolhida. Por exemplo, para a primeira delas:

$$\int_{frente} \cong \vec{D}_{frente}.\Delta\vec{S}_{frente} =$$

$$\vec{D}_{frente}.\Delta x.\Delta y.\hat{a}_x = D_{x(frente)}.\Delta x.\Delta y \tag{3.4}$$

(D_X é a componente de $\vec{D}$ normal ao plano yz).

Aproximando $D_{X(frente)}$ pelos dois primeiros termos da expansão em série de Taylor de D_x:

$$D_{x(frente)} = D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}.\frac{\partial D_x}{\partial x} \tag{4.5}$$

Portanto:

$$\int_{frente} = \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}.\frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y.\Delta z \tag{3.6}$$

Consideremos agora a integral $\int_{atrá\ s}$:

$$D_{x(atrás)} \cong D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}.\frac{\partial D_x}{\partial x} \tag{3.7}$$

$$\int_{atrás} = \vec{D}_{x(atrás)}.\Delta\vec{S} \cong \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}.\frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \tag{3.8}$$

(porque o vetor unitário $\hat{a}_X$ tem agora direção negativa).

Combinando as duas integrais:

$$\int_{frente} + \int_{atrás} \cong \frac{\partial D_x}{\partial x}.\Delta x.\Delta y.\Delta z \tag{3.9}$$

Utilizando o mesmo raciocínio para as outras integrais:

$$\int_{dir.} + \int_{esq.} \cong \frac{\partial D_y}{\partial y}.\Delta x.\Delta y.\Delta z \tag{3.10}$$

$$\int_{topo} + \int_{base} \cong \frac{\partial D_z}{\partial z}.\Delta x.\Delta y.\Delta z \tag{3.11}$$

Assim:

$$\oint \vec{D}.d\vec{S} \cong \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v \tag{3.12}$$

A expressão acima diz que o fluxo elétrico que atravessa uma superfície fechada muito pequena é igual ao produto entre o volume envolvido por essa superfície e a soma das derivadas parciais das componentes do vetor $\vec{D}$ em relação às suas próprias direções.

Igualando-se as equações 3.1 e 3.12, e em seguida dividindo todos os termos por Δv, tem-se:

$$\frac{\oint \vec{D}.d\vec{S}}{\Delta v} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \tag{3.13}$$

Passando ao limite, com Δv tendendo a zero:

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint \vec{D}.d\vec{S}}{\Delta v} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \tag{3.14}$$

Fixando e memorizando ...

Antes de prosseguir, refaça as passagens realizadas para obter a expressão (3.14):

1. Antes, cite que requisitos devem ser obedecidos para que a lei de Gauss na forma integral (equação 2.8) possa ser utilizada.
2. Utilizando um sistema de coordenadas cartesianas, represente um pequeno volume com densidade de cargas ρ.
3. Represente as componentes do vetor densidade de fluxo em cada superfície, aproximando-as pelos dois primeiro termos de uma expansão em série de Taylor.
4. Calcule cada integral, e combinea-as duas a duas.
5. Some os três resultados parciais, divida por ΔV, passe ao limite e obtenha a equaçao 3.14.

3.2 - DIVERGÊNCIA

A operação indicada pelo primeiro membro da equação 3.14 não é pertinente apenas ao fenômeno ora em estudo. Ela surgiu tantas vezes no estudo de outras grandezas físicas descritas por campos vetoriais, que cientistas e matemáticos do século passado resolveram batizá -la com um nome especial: **Divergência**.

Matematicamente:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint \vec{A}.d\vec{S}}{\Delta v} \qquad (3.15)$$

A divergência de um vetor densidade de fluxo $\vec{A}$ (que representa um fenômeno físico) é a variação do fluxo através da superfície fechada de um pequeno volume que tende a zero

A divergência é uma operação matemática sobre um vetor, definida como sendo a soma das derivadas parciais das componentes do vetor, cada uma em relação à sua própria direção. Apesar de ser uma operação sobre um vetor, o resultado é um escalar.

A partir da definição da divergência, e da equação 3.14, podemos expressar a lei de Gauss na forma diferencial:

$$\mathrm{div}.\vec{D} = \rho \qquad (3.16)$$

A equação 3.16 nos diz que

o fluxo elétrico por unidade de volume deixando um volume infinitesimal que tende a zero, é igual à densidade volumétrica de carga neste ponto

M3.3 - O OPERADOR ∇ E O TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

O operador ∇ é definido como sendo o operador diferencial:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}.\hat{a}_x+\frac{\partial}{\partial y}.\hat{a}_y+\frac{\partial}{\partial z}.\hat{a}_z \qquad (3.17)$$

Realizando o produto escalar $\nabla.\vec{D}$, tem-se:

$$\nabla.\vec{D}=\left(\frac{\partial}{\partial x}.\hat{a}_x+\frac{\partial}{\partial y}.\hat{a}_y+\frac{\partial}{\partial z}.\hat{a}_z\right)\left(D_x.\hat{a}_x+D_y.\hat{a}_y+D_z.\hat{a}_z\right) \qquad (3.18)$$

Lembrando que o produto escalar entre vetores unitários ortogonais é nulo, o resultado será:

$$\nabla.\vec{D}=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z} \qquad (3.19)$$

ou ainda:

$$\nabla.\vec{D}=\rho \qquad (3.20)$$

Fixando e memorizando ...

Antes de prosseguir, execute as seguintes atividades:

1. Defina o que é divergência de uma grandeza vetorial.
2. Expresse matematicamente a divergência de um vetor.
3. Enuncie a lei de Gauss na forma diferencial.
4. Equacione a lei de Gauss na forma diferencial.

O operador ∇ não é utilizado somente em operações de divergência, mas também em outras operações vetoriais. Entretanto, ele é definido somente em coordenadas cartesianas. A princípio, a expressão $\nabla.\vec{D}$ serviria apenas para se calcular as derivadas parciais do vetor $\vec{D}$ em coordenadas cartesianas. Entretanto, a expressão $\nabla.\vec{D}$ como sendo a divergência do vetor densidade de fluxo elétrico é consagrada, e pode ser utilizada mesmo quando o vetor é definido em outros sistemas de referência. Por exemplo, em coordenadas cilíndricas:

$$\nabla.\vec{D}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rD_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{3.21}$$

e em coordenadas esféricas:

$$\nabla.\vec{D}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right)+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right)+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A}{\partial \phi} \tag{3.22}$$

Deve-se lembrar, porém, que as expressões 3.21 e 3.22 não foram obtidas através de operações matemáticas de um produto escalar entre ∇ e $\vec{D}$, pois ∇ não possui uma forma especifica para estes tipos de sistemas de coordenadas.

Finalmente, vamos associar as formas integral e diferencial da Lei de Gauss, para obter o teorema da divergência.

Lembrando que:

$$\oint \vec{D}.d\vec{S}=\int_{vol}\rho.dv$$

e:

$$\nabla.\vec{D}=\rho$$

Substituindo ρ por $\nabla.\vec{D}$ na expressão em integrais, podemos escrever:

$$\oint \vec{D}.d\vec{S}=\int_{vol}\left(\nabla.\vec{D}\right)dv \tag{3.23}$$

A equação 3.23 é o **Teorema da Divergência** (ou teorema de Gauss), e estabelece que a integral da componente normal de qualquer campo vetorial sobre uma superfície fechada é igual à integral da divergência deste campo no volume envolvido por essa superfície fechada.

Uma maneira simples de se entender fisicamente o teorema da divergência é através da figura 3.2. Um volume v, limitado por uma superfície fechada S é subdividido em pequenos volumes incrementais, ou células. O fluxo que diverge de cada célula converge para as células vizinhas, a não ser que a célula possua um de seus lados sobre a superfície S. Então a soma da divergência da densidade de fluxo de todas as células será igual à soma do fluxo liquido sobre a superfície fechada.

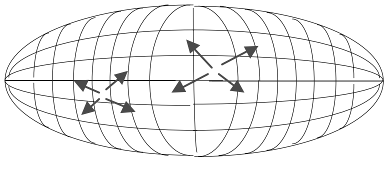

Fig. 3.2 - Volume v subdividido em volumes incrementais

Exemplo 3.1

Calcular os dois lados do teorema da divergência, para uma densidade de fluxo elétrico $\vec{D}=xy^2.\hat{a}_x+yx^2.\hat{a}_y$, em um cubo de arestas igual a 2 unidades.

Solução

Vamos colocar a origem do sistema de coordenadas cartesianas em uma dos vértices.

O vetor $\vec{D}$ possui componentes nas direções x e y. Portanto, a princípio, a integral de superfície deve ser calculada sobre 4 lados do cubo:

$$\oint \vec{D}.d\vec{S}=\int_{frente}+\int_{atrás}+\int_{esq.}+\int_{dir}$$

$$\int_{frente}=\int_0^2\int_0^2 2.y^2.\hat{a}_x dy.dz.\hat{a}_x=\frac{32}{3}$$

$$\int_{atrás}=\int_0^2\int_0^2 0.y^2.\hat{a}_x.dy.dz.(-\hat{a}_x)=0$$

$$\int_{esq.}=\int_0^2\int_0^2 0.x^2.\hat{a}_y.dx.dz.(-\hat{a}_y)=0$$

$$\int_{dir.}=\int_0^2\int_0^2 2.x^2.\hat{a}_y.dx.dz.\hat{a}_y=\frac{32}{3}$$

$$\oint \vec{D}.d\vec{S}=\frac{64}{3}$$

$$\nabla.\vec{D}=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla.\vec{D}=x^2+y^2$$

$$\int_{vol}\left(\nabla.\vec{D}\right)dv=\int_0^2\int_0^2\int_0^2\left(x^2+y^2\right)dx.dy.dz$$

$$\int_{vol}\left(\nabla.\vec{D}\right)dv=2\int_0^2\int_0^2\left(x^2+y^2\right)dy.dx$$

$$v=4\left(\int_0^2 x^2dx+\int_0^2 y^2dy\right)$$

$$\int_{vol}\left(\nabla.\vec{D}\right)dv=\frac{64}{3}$$

Refaça este exemplo ...

Antes de prosseguir, refaça o exemplo acima

1. Desenhe um cubo e coloque a origem de um sistema de coordenadas cartesianas em um de seus vértices.
2. Divida a superfície do cubo em quatro superfícies laterais.
3. Calcule a integral para cada superfície e some-as.
4. Calcule a divergência da densidade de fluxo..
5. Integre a expressão para a divergência da densidade de fluxo no volume do cubo.
6. Verifique se os resultados foram iguais

EXERCÍCIOS

1) - Dado $\vec{A}=(3x^2+y).\hat{a}_x+(x-y^2).\hat{a}_y$ calcule $\nabla.\vec{A}$.

2) -Obtenha a divergência em coordenadas esféricas. Use um volume infinitesimal com arestas Δr, $r\Delta\theta$ e $r\mathrm{sen}\theta\Delta\phi$.

3) - Dipolo Elétrico, ou simplesmente dipolo, é o nome dado ao conjunto de duas cargas pontuais de igual magnitude e sinais opostos, separadas por um distância pequena se comparada com a distância ao ponto P onde se deseja conhecer o campo elétrico. O ponto P é descrito em coordenadas esféricas (figura 1), por r, θ e ϕ = 90 graus, em vista da simetria azimutal. As cargas positivas e negativas estão separadas por d m, e localizadas em (0,0,d/2) m e (0,0,-d/2) m. O campo no ponto P é $\vec{E}=\dfrac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta.\hat{a}_r+\mathrm{sen}\,\theta.\hat{a}_\theta)$. Mostre que a divergência deste campo é nula.

4) - Para a região $0 < r \le 2$ m (coordenadas cilíndricas), $\vec{D}=(4r^{-1}+2e^{-0,5r}+4r^{-1}e^{-0,5r})\hat{a}_r$, e para $r > 2$m, $\vec{D}=(2,057r^{-1}).\hat{a}_r$. Pede-se obter a densidade de cargas ρ para ambas as regiões.

5) - Dado $\vec{D}=(10r^3/4).\hat{a}_r$ em coordenadas cilíndricas, calcule cada um dos lados do teorema da divergência, para o volume limitado por r = 3 m, z = 2 m e z = 12 m.

6) - Dado $\vec{D}=10\,\mathrm{sen}\,\theta.a_r+2\cos\theta.a_\theta$, pede-se calcular ambos os lados do teorema da divergência, para o volume limitado pela casca r = 3 m.

7) - Uma linha uniforme de cargas de densidade ρ_l pertence ao eixo *z*. (a) Mostre que $\nabla.\vec{D}=0$ em qualquer lugar, exceto na linha de cargas. (b) substitua a linha de cargas por uma densidade volumétrica de cargas r_0 em $0 \le r \le r_0$ m. Relacione ρ_l com r_0 de modo que a carga por unidade de comprimento seja a mesma. Determine então $\nabla.\vec{D}$ em toda parte.

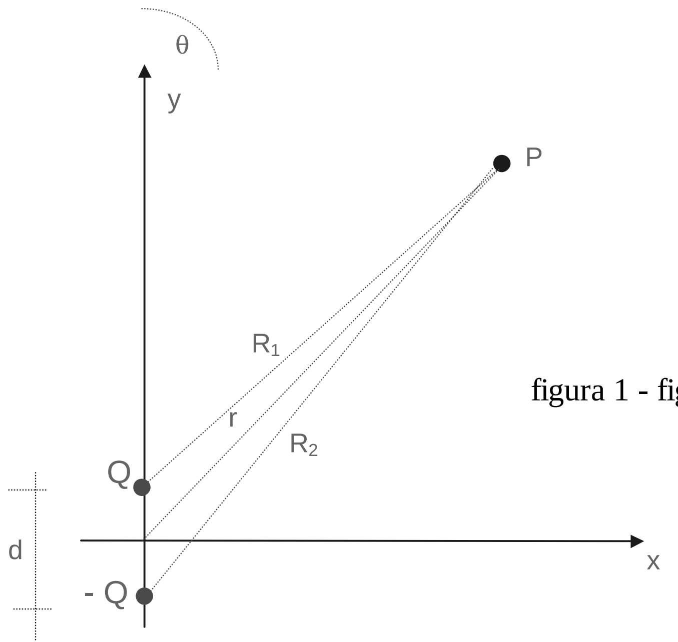

figura 1 - figura do problema 3