4 TRABALHO E POTENCIAL ELETROSTÁTICO

Ao final deste capítulo você deverá ser capaz de:

- Obter a expressão para o trabalho realizado Calcular o trabalho que é realizado ao se movimentar uma carga elétrica em um campo elétrico
- Calcular o trabalho que é realizado ao se movimentar uma carga elétrica em um campo elétrico.
- Definir Diferença de potencial entre dois pontos
- Calcular a diferença de potencial entre dois pontos, para uma dada distribuição de campo elétrico .
- Definir potencial eletrostático absoluto.
- Calcular potencial absoluto para distribuições especiais de carga.

No capítulo 1 deste curso partimos da experiência de Coulomb para encontrar a expressão matemática para a força de origem eletrostática entre dois corpos eletricamente carregados. Ao dividirmos esta expressão por uma das cargas, definimos uma nova grandeza vetorial, denominada vetor intensidade de campo elétrico, que nada mais é do que um campo de força criado pela outra carga. No capítulo 2, partindo da experiência de Faraday descobrimos a existência de outras duas grandeza da eletrostática. O fluxo elétrico, uma grandeza escalar que tem a mesma dimensão de carga elétrica, e o vetor densidade de fluxo elétrico, uma grandeza vetorial que se relaciona com o vetor intensidade de campo elétrico através de uma constante chamada de constante de permissividade. Os capítulos 2 e 3 serviram para introduzir a lei de Gauss para a eletrostática, tanto na forma integral capítulo 2), como na forma diferencial (capítulo 3). Neste capítulo , a partir de considerações sobre o trabalho realizado ao se movimentar uma carga elétrica na presença de um campo elétrico, introduziremos uma outra grandeza importante da eletrostática, a função potencial eletrostático.

4.1 - TRABALHO ENVOLVIDO NO MOVIMENTO DE UMA CARGA PONTUAL EM UM CAMPO ELÉTRICO

Imagine um campo elétrico, provocado por uma configuração de cargas qualquer (pontual, linha de cargas etc). Suponha agora que uma carga pontual Q seja colocada nesse campo elétrico. Sobre essa carga pontual estará agindo uma força de origem eletrostática, dada por:

$$\vec{F}_e = Q\vec{E} \text{ (N)} \qquad (4.1)$$

Se quisermos mover essa carga contra a ação do campo elétrico, temos de exercer uma força igual e oposta àquela exercida pelo campo elétrico, na direção do movimento. Isso exige um dispêndio de energia ou seja, a realização de um trabalho. Se o movimento é no sentido do campo elétrico, o dispêndio de energia é negativo, ou seja não realizamos trabalho. Este é realizado pelo campo elétrico.

Suponhamos que queiramos mover a carga Q de uma distância $d\vec{L}$ no campo elétrico $\vec{E}$, conforme a figura 4.1. O nosso gasto de energia será o produto da força pela distância:

$$dW = -QEdL\cos\theta = -Q\vec{E}.d\vec{L} \qquad (4.2)$$

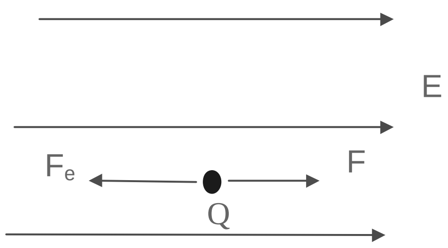

Fig. 4.1 - Carga Q em um campo elétrico E

Pela equação 4.2 podemos perceber facilmente que se a carga for movimentada perpendicularmente ao campo elétrico, o trabalho será nulo.

Exemplo 4.1

Dado o campo elétrico $\vec{E} = 3x^2.\hat{a}_x + 2z.\hat{a}_y + 2y.\hat{a}_z$ N/C, determine o trabalho realizado para se mover uma carga de 20 μC ao longo de um percurso incremental 10^{-4} m de comprimento, na direção de $-0,6.\hat{a}_x + 0,48.\hat{a}_y - 0,64.\hat{a}_z$ localizado no ponto (2,-2, -5) m.

Solução

$$\vec{E} = 3x2^2.\hat{a}_x + 2x(-5).\hat{a}_y + 2x(-2).\hat{a}_z$$

$$\vec{E} = 12.\hat{a}_x - 10.\hat{a}_y - 4.\hat{a}_z \text{ (N / C)}$$

$$dW = -20x10^{-6}x10^{-4}x((12.\hat{a}_x - 10.\hat{a}_y - 4.\hat{a}_z).(-0,6.\hat{a}_x + 0.48.\hat{a}_y - 0,64.\hat{a}_z)$$

$$dW = -2x10^{-9}x(-7,2 - 4,8 + 2,56) = 18,88\,\text{nJ}$$

O trabalho realizado para mover uma carga de uma distância finita é dado pela integral:

$$W = -Q\int_{inic.}^{final} \vec{E}.d\vec{L} \text{ (J)} \tag{4.3}$$

A equação 4.3 representa uma integral de linha. Para entender melhor esse conceito, imagine que queiramos calcular o trabalho para mover uma carga Q em um campo elétrico, do ponto B ao ponto A, conforme é representado na figura 4.2.

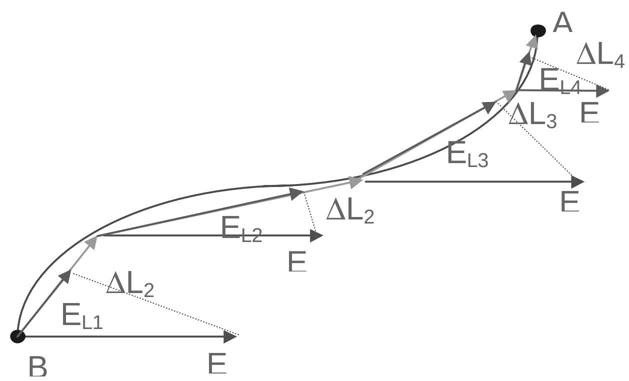

figura 4.2 - Carga movendo-se de B até A.'

O caminho pode ser subdividido em um grande numero de segmentos $\Delta\vec{L}$'s. A componente do campo ao longo de cada segmento é multiplicada pelo tamanho do segmento, e os resultados para todos os segmentos somados. Obviamente isso é um somatório. A integral é obtida quando o comprimento de cada segmento tender a zero.

Matematicamente:

$$W = -Q(E_{L1}.\Delta L_1 + E_{L2}.\Delta L_2 + ... + E_{Ln}.\Delta L_n) \tag{4.4}$$

ou, em notação vetorial:

$$W = -Q(\vec{E}_1.\Delta\vec{L}_1 + \vec{E}_2.\Delta\vec{L}_2 + ... + \vec{E}_n.\Delta\vec{L}_n) \tag{4.5}$$

Se o campo for uniforme:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = ... = \vec{E}_n \tag{4.6}$$

$$W = -Q.\vec{E}(\Delta\vec{L}_1 + \Delta\vec{L}_2 + ... + \Delta\vec{L}_n) \tag{4.7}$$

A soma dos segmentos vetoriais entre parêntesis corresponde ao vetor dirigido do ponto B ao ponto A, $\vec{L}_{BA}$. Portanto:

$$W = -Q\vec{E}.\vec{L}_{BA} \tag{4.8}$$

Pelo raciocínio apresentado acima, descobrimos que o trabalho realizado para movimentar a carga Q do ponto B ao ponto A independe do caminho tomado, mas apenas de Q, $\vec{E}$ e $\vec{L}_{BA}$, o vetor que vai de B até A. Essa afirmação é válida para qualquer configuração de campo elétrico invariante no tempo.

Fixando e memorizando ...

Antes de prosseguir, refaça as passagens realizadas para obter a expressão (4.8):

1. Equaciona o trabalho incremental que é realizado para movimentar uma carga elétrica na presença de um campo elétrico, de um incremento dL.
2. Escreva a equação que permite calcular o trabalho para se movimentar uma carga elétrica de um ponto inicial a um ponto final, na presença de um campo elétrico.
3. Mostre que esse trabalho não depende do caminho escolhido.
4. Em que situação isso é válido ?

`Exemplo 4.2`

Calcular o trabalho realizado para mover uma carga Q = - 10^{-5} C, imersa em um campo elétrico $\vec{E}=-y.a_y+2z.a_z$, ao longo do caminho definido pela reta $y+z=2$, e ao longo do caminho definido pelas retas z = 0 e y = 0 m .

Solução

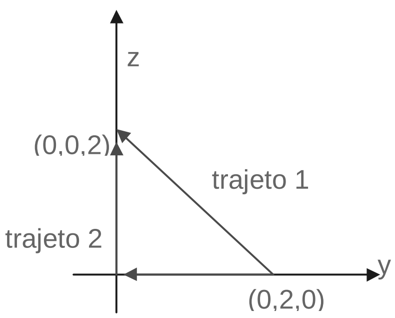

fig. 4.3 - Carga movendo-se por dois caminhos

Para o primeiro caminho temos:

$$dW = -Q\vec{E}.d\vec{L}$$

$$dW=-Q(-y.\hat{a}_y+2z.\hat{a}_z).(dy.\hat{a}_y+dz.\hat{a}_z)$$

$$dW=-Q(-ydy+2zdz)$$

$$y+z=2\ ;\ y=2-z$$

$$dy=-dz$$

$$dW=-Q(-(2-z)(-dz)+2zdz)=-Q(2+z)dz$$

$$W=10^{-5}\int_0^2(2+z)dz=10^{-5}(2z+\frac{z^2}{2})\Big|_0^2=6x10^{-5}\,(J)$$

Para o segundo caminho:

$$dW_1 = -Q(-y\hat{a}_y . dy\hat{a}_y) = Qydy = -10^{-5}\, ydy$$

$$W_1 = -10^{-5}\int_2^0 ydy = -10^{-5}\left.\frac{y^2}{2}\right|_2^0 = 2x10^{-5}\ (J)$$

$$dW_2 = -Q(2z.\hat{a}_z.dz.\hat{a}_z) = -Q2zdz = 10^{-5}2zdz$$

$$W_2 = 10^{-5}\int_0^2 2zdz = 2x10^{-5}\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^2 = 4x10^{-5}$$

$$W = W_1 + W_2 = 6x10^{-5}\ (J)$$

Refaça este exemplo ...

Antes de prosseguir, refaça o exemplo acima

1. Encontre a expressão para o diferencial de trabalho, utilizando a expressão para o campo elétrico com ambas as componentes e um diferencial de deslocamento genérico.
2. Utilizando a equação da reta (caminho 1), explicite uma das variáveis em função da outra.
3. Relacione os diferenciais dy e dz.
4. Substitua os resultados dos passos 2 e 3 na expressão do diferencial de trabalho. Nesta expressão só restará uma das variáveis.
5. Integre essa expressão de acordo com a variável escolhida.
6. Para se exercitar mais, experimente calcular agora o trabalho realizado ao longo do caminho 1, utilizando a variável que foi substituída.
7. Calcule agora o trabalho para mover a carga ao longo do caminho 2. Expresse o diferencial de trabalho para o trecho ao longo do eixo y. Portanto apenas a componente em y e o diferencial dy estarão envolvidos. Em que direção estará o vetor unitário ?
8. Calcule o trabalho relativo a este trecho.
9. Expresse o diferencial de trabalho para o trecho ao longo do eixo z. Portanto apenas a componente em z e o diferencial dz estarão envolvidos.
10. Calcule o trabalho relativo a este trecho, e some com o do trecho anterior.

Exemplo 4.3

Calcular o trabalho realizado para mover uma carga pontual positiva Q C, imersa no campo elétrico de uma linha de carga de densidade ρ_l C/m do ponto r_1 m ao ponto r_2 m, conforme a figura abaixo.

Solução

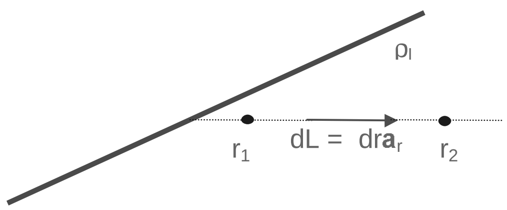

fig. 4.4 - Carga imersa no campo de uma linha de cargas.

O campo elétrico devido à linha de cargas será inteiramente na direção radial. Em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{E} = E_r.\hat{a}_r = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}.\hat{a}_r \quad (N/C)$$

O diferencial do caminho em coordenadas cilíndricas é:

$$d\vec{L} = dr.\hat{a}_r + rd\phi.\hat{a}_\phi + dz.\hat{a}_z$$

O trabalho diferencial será:

$$dW = -Q.\vec{E}.d\vec{L} = -Q.\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}.dr$$

$$W = -Q\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$$

$$W = -Q\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} \quad (J)$$

Como r_2 é maior que r_1, $\ln(r_2/r_1)$ é o trabalho realizado é negativo, ou seja, a fonte externa que move a carga recebe energia.

4.2 - DIFERENÇA DE POTENCIAL E POTENCIAL ELETROSTÁTICO

Se tomarmos a equação para o trabalho realizado para se mover uma carga Q em um campo elétrico, e a dividirmos pelo valor da carga Q, Teremos uma nova grandeza que denominaremos de **diferença de potencial.** Matematicamente:

$$\text{Diferença de Potencial} = \frac{W}{Q} = -\int_{\text{inic.}}^{\text{inal}}\vec{E}.d\vec{L} \qquad (4.9)$$

Em outras palavras,

A diferença de potencial (ddp) entre dois pontos pode ser definida como sendo o trabalho realizado para se mover uma carga unitária de um ponto a outro em um campo elétrico

. A unidade para a diferença de potencial é Joule por Coulomb, ou Volt (V). Se A é o ponto final e B o ponto inicial, a diferença de potencial V_{AB} é definida como:

$$V_{AB} = -\int_B^A \vec{E}.d\vec{L} \ (V) \qquad (4.10)$$

No exemplo da linha de carga da última seção, o trabalho para se deslocar a carga de r_2 para r_1 é:

$$W = Q\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}\ \text{(J)} \qquad (4.11)$$

Portanto, a diferença de potencial entre r_1 e r_2 é:

$$V_{12} = \frac{W}{Q} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}\ \text{(V)} \qquad (4.12)$$

Exemplo 4.4

Calcular a diferença de potencial entre os pontos r_1 e r_2, $r_2 > r_1$, devido a uma carga pontual de Q Coulombs positivos. Mostrar que ela independe das posições θ e ϕ.

Solução

$$V_{12} = -\int_2^1 \vec{E}.d\vec{L}\ \text{(V)}$$

O campo elétrico possui simetria esférica. Portanto a expressão para o vetor intensidade de campo elétrico é:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.\hat{a}_r$$

A expressão genérica para o vetor $d\vec{L}$ é:

$$d\vec{L} = dr.\hat{a}_r + rd\theta.\hat{a}_\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta d\phi.\hat{a}_\phi$$

Ao realizarmos o produto escalar $\vec{E}.d\vec{L}$, fica claro que apenas o produto que envolve a componente na direção radial do incremento do caminho não se anulará.

Demonstrando, portanto, que a diferença de potencial independe das componentes θ e ϕ.

$$\vec{E}.d\vec{L} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{dr}{r^2}$$

$$V_{12} = -\int_2^1 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$V_{12} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_2}^{r_1}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_2}^{r_1}$$

$$V_{12} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\ \text{(V)}$$

Refaça este exemplo ...

Antes de prosseguir, refaça o exemplo acima

1. Identifique a simetria do campo elétrico, e expresse o vetor intensidade de campo elétrico utilizando o sistema de coordenadas mais adequado.
2. Para esse sistema de coordenadas, expresse o vetor $d\vec{L}$.
3. Mostre agora porque o potencial não depende de ϕ e θ..
4. Realize o produto escalar e integre o resultado.

O potencial absoluto pode ser definido tomando-se um potencial de referência que consideraremos ter potencial zero. Usualmente o esse potencial é tomado na superfície da terra ou no infinito. No exemplo anterior, se um dos pontos (ponto r_2, por exemplo) estiver no infinito, o potencial absoluto no ponto r_1 será:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_1} \text{ (V)} \tag{4.13}$$

Se o potencial absoluto de A é V_A, e o potencial absoluto de B é V_B, a diferença de potencial V_{AB} é:

$$V_{AB} = V_A - V_B \text{ (V)} \tag{4.14}$$

Fixando e memorizando ...

Antes de prosseguir, refaça as passagens realizadas nesta seção:

5. Defina o que é diferença de potencial eletrostático entre dois pontos.
6. Escreva a equação para a diferença de potencial entre dois pontos. Represente adequadamente os índices e limites de integração. Porque o sinal negativo sempre aparece nessa equação ?
7. Dê uma definição para o potencial eletrostático absoluto

4.4 - O POTENCIAL DE UM SISTEMA DE CARGAS

Para duas cargas pontuais o potencial absoluto será:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right) \text{ (V)} \tag{4.15}$$

e para n cargas:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{R_i} \text{ (V)} \tag{4.16}$$

Substituindo cada carga por $\rho\Delta v$:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{R_i} \text{ (V)} \tag{4.17}$$

Fazendo n → ∝ :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{vol}\frac{\rho dv}{R} \quad (V) \tag{4.18}$$

Para uma distribuição superficial de cargas:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{s}\frac{\rho_s dS}{R} \quad (V) \tag{4.19}$$

Para uma distribuição linear de cargas:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_l dL}{R} \quad (V) \tag{4.20}$$

Exemplo 4.5

Calcular o potencial em um ponto z metros acima do centro de um anel de raio a m, com uma distribuição linear de carga ρ_l C/m.

Solução

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_l dL}{R} \quad (V)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho_l . dL}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}\int dL$$

$$V = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}.2\pi a = \frac{\rho_l . a}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}} \quad (V)$$

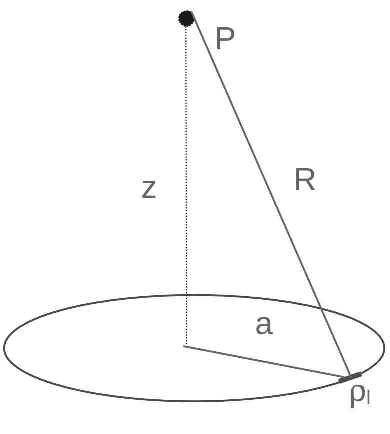

fig. 4.4 - anel de cargas

Refaça este exemplo ...

Antes de prosseguir, refaça o exemplo acima:

1. Leia atentamente o enunciado e procure esboçar graficamente o problema.
2. Escreva a expressão para o potencial eletrostático devido a uma distribuição linear de cargas
3. Substitua R por uma expressão que envolva as dimensões dadas
4. Isole tudo o que for constante na expressão da integral.
5. Expresse o resultado final

Exemplo 4.6

Resolver o exemplo anterior, considerando um anel de raio interno a m, raio externo b m e densidade superficial ρ_s C/m^2.

Solução

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\rho_s . dS}{R} \quad (V)$$

$$dS = r.d\phi.dr \quad ; \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\rho_s . rd\phi. dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$V = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$V = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\int_a^b \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$V = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\sqrt{r^2 + z^2}\Big|_a^b$$

$$V = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{b^2+z^2} - \sqrt{a^2+z^2}\right] \quad (V)$$

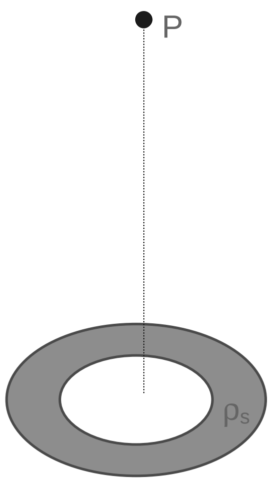

fig. 4.6 - Anel com distribuição superficial de cargas.

Refaça este exemplo ...

Antes de prosseguir, refaça o exemplo acima:

6. Leia atentamente o enunciado e procure esboçar graficamente o problema, representando corretamente distâncias, elemento de área etc.
7. Escreva a expressão para o potencial eletrostático devido a uma distribuição superficial de cargas
8. Expresse o elemento de área em coordenadas cilíndricas. e substitua R por uma expressão que envolva as variáveis de integração
9. Isole tudo o que for constante na expressão da integral.
10. Calcule as integrais e expresse o resultado final

EXERCÍCIOS

1) - Calcule o trabalho necessário para movimentar uma carga pontual Q = -20 mC no campo $\vec{E} = 2(x+4y).\hat{a}_x + 8x.\hat{a}_y \ (V/m)$ da origem ao ponto (5,3,1) m, ao longo do percurso $x^2 = 9y$.

2) - Calcule o trabalho necessário para movimentar uma carga pontual Q = 5 mC de (5 m, p, 0) a (3 m, p/2. 3 m), coordenadas cilíndricas, no campo $\vec{E} = (10^5/r).\hat{a}_r + 10^5 z.\hat{a}_z (V/m)$.

3) - Uma carga pontual de 0,6 nC está localizada no ponto (3,6,6) m. Calcule a diferença V_{AB}, entre os pontos A(3,3,6) m e B(-3,3,6) m.

4) - Se a referência de potencial nulo está em r = 12 m, e uma carga pontual Q = 0.6 nC ocupa a origem, encontre os potenciais em r = 8 m e r = 24 m.

5) - Suponha que em um dia sujeito à instabilidades atmosféricas a diferença de potencial entre a superfície da terra e a eletrosfera (digamos 25 km acima da superfície terrestre) seja de 600000 V. Um avião com 12 m de envergadura em suas asas está voando a 2600 m de altitude, com uma inclinação de 45° de suas asas. Calcule a diferença de potencial entre as suas extremidades (das asas).

6) -Três cargas pontuais de 2 nC ocupam os vértices de um triângulo equilátero de 2 m de lado. Calcule o potencial em um ponto 2 m acima de seu centro geométrico.

7) - Uma distribuição linear de cargas com densidade ρ_l = 1 nC ocupa o perímetro de um quadrado de 5 m de lado. Calcule o potencial no ponto situado 6 m acima de seu centro.

8) - Desenvolva uma expressão para o potencial num ponto distante radialmente d m do ponto médio de uma distribuição linear de cargas finita, de comprimento L m e de densidade uniforme r_l (C/m). Aplique o resultado do exercício anterior como prova.

9) - Um disco $0 \leq r \leq a$ m, $z = 0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, possui uma densidade superficial de cargas $\rho_s = \rho_0 r^2 / a^2 \ (C/m^2)$. Encontre V(0,0,z m) no espaço livre.

10) - Uma película plana uniformemente carregada com $\rho_s = (1/5\pi)$ nC/m^2 está localizada em x = 0, e uma segunda película plana, com $\rho_s = (-1/5\pi)$ nC/m^2 está localizada em x = 10 m. Calcule V_{AB} , V_{BC} , V_{AC} para A(10, 0, 0) m, B(4, 0, 0) m e C(0, 0, 0) m.