5 O GRADIENTE DO POTENCIAL E ENERGIA NO CAMPO ELETROSTÁTICO

5.1 - O GRADIENTE DO POTENCIAL

A expressão genérica para o cálculo da diferença de potencial como uma integral de linha é:

$$V = -\int \vec{E}.d\vec{L} \quad (V) \tag{5.1}$$

Se o caminho escolhido for um $\Delta\vec{L}$, tal que se possa considerar $\vec{E}$ constante nesse caminho :

$$\Delta V = -\vec{E}.\Delta\vec{L} \quad (V) \tag{5.2}$$

$$\vec{E}.\Delta\vec{L} = E\Delta L\cos\theta \quad (V) \tag{5.3}$$

$$\Delta V = -E\Delta L\cos\theta \quad (V) \tag{5.4}$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta L} = -E\cos\theta \quad (V/m) \tag{5.5}$$

Passando ao limite:

$$\frac{dV}{dL} = -E\cos\theta \quad (V/m) \tag{5.6}$$

A expressão acima será máxima quando cosθ= -1:

$$\left.\frac{dV}{dL}\right|_{max} = E \quad (V/m) \tag{5.7}$$

Pela equação 6.7 podemos concluir que:

- A magnitude do campo elétrico é dada pela máxima taxa de variação do potencial com a distância.

- Este valor máximo é obtido quando a direção do incremento de distância for oposta à $\vec{E}$.

Pela figura 5.1, partindo do ponto P, a maior taxa de variação de V com a distância se dá na direção crescente dos potenciais, ao longo de uma linha da esquerda para a direita e para cima. Pela equação 5.7 o sentido de $\vec{E}$ é para a direita e para baixo.

Definindo o vetor unitário $\hat{a}_n$ como sendo o vetor normal à superfície equipotencial, e dirigido no sentido dos potenciais crescentes, podemos escrever para o vetor campo elétrico:

$$\vec{E} = -\left.\frac{dV}{dL}\right|_{max}.\hat{a}_n \quad (V/m) \tag{5.8}$$

Fazendo:

$$\left.\frac{dV}{dL}\right|_{max} = \frac{dV}{dN} \tag{5.9}$$

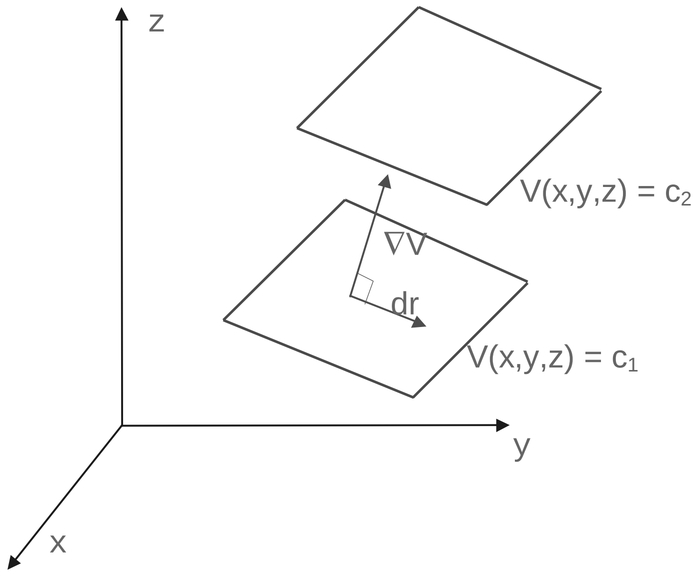

figura 5.1 - gradiente de V

fica, então:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dN}.\hat{a}_n \quad (V/m) \tag{5.10}$$

A operação $(dV/\ dN).\hat{a}_n$ é conhecida como o gradiente do potencial V. Novamente é um tipo de operação que não aparece apenas no caso de potenciais elétricos, mas também na hidráulica, termodinâmica, magnetismo etc.

Usando este novo conceito podemos escrever:

$$\vec{E} = -\text{grad}V \tag{5.11}$$

O gradiente , uma operação sobre um escalar, e resulta num vetor.

(Você também já deve ter notado que o vetor intensidade de campo elétrico está sendo agora expresso em Volts/metro (V/m).)

A expressão 5.11, da forma como está colocada ainda não nos permite fazer muita coisa. Vamos agora encontrar uma maneira de escrever o vetor intensidade de campo elétrico em termos de derivadas parciais do potencial elétrico. Em coordenadas cartesianas podemos escrever o diferencial de potencial dV como sendo :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}.dx + \frac{\partial V}{\partial y}.dy + \frac{\partial V}{\partial z}.dz \tag{5.12}$$

Por outro lado:

$$dV = -\vec{E}.d\vec{L} = -E_x.dx - E_y.dy - E_z.dz \tag{5.13}$$

Igualando 5.12 com 5.13 podemos concluir que:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{5.14}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{M1.6.15}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{5.16}$$

ou:

$$\vec{E} = -(\frac{\partial V}{\partial x}.\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}.\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}.\hat{a}_z) \quad (V) \tag{5.17}$$

Relembrando a definição do operador ∇:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}.\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}.\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}.\hat{a}_z \tag{5.18}$$

e aplicando-o sobre o potencial V, teremos:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}.\hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}.\hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}.\hat{a}_z \tag{5.19}$$

Portanto:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (V/m) \tag{5.20}$$

Para outros sistemas de coordenadas temos:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}.a_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}.a_\theta + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\phi}\frac{\partial V}{\partial \phi}.a_\phi \tag{M1.6.21}$$

em coordenadas esféricas, e:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}.a_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}.a_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}.a_z \tag{5.22}$$

em coordenadas cilíndricas.

Exemplo 5.1

Encontrar o campo elétrico devido à uma carga pontual, utilizando o potencial eletrostático.

Solução

O campo elétrico de uma carga pontual possui apenas a componente radial, em coordenadas esféricas:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}.\hat{a}_r \quad (V/m)$$

O potencial eletrostático em um ponto distante r m da carga pontual é:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q}{r} \quad (V)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{Q}{r^2} \quad (V/m)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} . \frac{Q}{r^2 .} . a_r \quad (V/m)$$

Exemplo 5.2

Dado: $V = (x-2)^2 . (y+2)^2 . (z-1)^3$ V encontre :

a) - $\vec{E}$ na origem.

b) - $\frac{dV}{dN}$

c) - $\hat{a}_n$

Solução

a) -

b) $\vec{E} = -\nabla V \quad (V/m)$

$$\vec{E} = -2.(x-2).(y+2)^2.(z-1)^3.a_x -$$

$$2.(x-2)^2.(y+2).(z-1)^3 - 3.(x-2)^2.(y+2)^2.(z-1)^2$$

$$\vec{E}_{(0,0,0)} = -16.\hat{a}_x + 16.\hat{a}_y - 48.\hat{a}_z \quad (V/m)$$

$$\vec{E}_{(0,0,0)} = -16(\hat{a}_x - \hat{a}_y + 3\hat{a}_z) \quad (V/m)$$

b) -

$\frac{dV}{dN}$ é a magnitude do campo elétrico.

Portanto :

$$\frac{dV}{dN} = 16\sqrt{1+1+9} = 53{,}1 \qquad (V/m)$$

c) -

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dN}.\hat{a}_n \quad (V/m)$$

$$-16(\hat{a}_x - \hat{a}_y + 3\hat{a}_z) = -53{,}1.\hat{a}_n$$

$$a_n = 0{,}301(\hat{a}_x - \hat{a}_y + 3\hat{a}_z)$$

5.2 - DENSIDADE DE ENERGIA NO CAMPO ELETROSTÁTICO

Suponhamos n cargas, $Q_1, Q_2, \ldots\ldots, Q_n$, positivas, localizadas no infinito (figura 5.2). Imaginemos agora uma região qualquer com campo elétrico total nulo ($\vec{E}$ = 0). Se desejarmos trazer a carga Q_1 para um ponto 1 pertencente a essa região, o trabalho será nulo, pois $\vec{E}$ = 0.

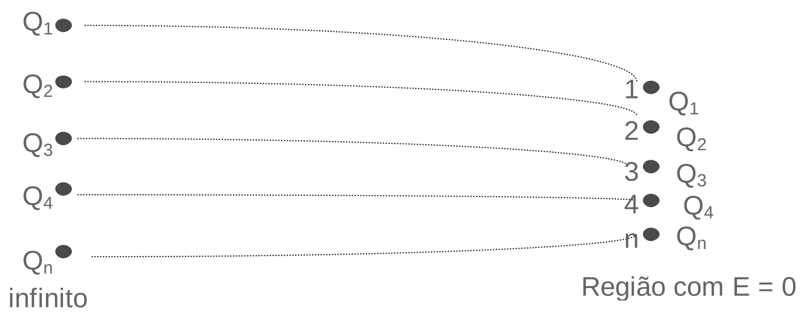

figura 5.2 - Sistema de cargas

Suponhamos agora que queiramos trazer a carga Q_2 para um ponto 2, próximo à carga Q_1. A fonte externa deverá realizar um trabalho, devido à presença da carga Q_1. Esse trabalho será:

$$W_2 = Q_2 . V_{2,1} \quad (J) \tag{5.23}$$

$V_{2,1}$ significa: potencial na posição 2, devido à carga Q_1.

Se a carga for mantida nessa posição a energia dispendida, pelo princípio da conservação de energia, se transforma em energia potencial. Uma vez retirada a força que a mantem nessa posição, a carga será acelerada para longe de sua posição, adquirindo energia cinética, e, realizando trabalho.

Voltando à nossa tarefa de mover cargas do infinito à região em questão, ao trazer a carga Q_3 para a posição 3, o trabalho realizado será:

$$W_3 = Q_3 . V_{3,1} + Q_3 . V_{3,2} \quad (J) \tag{5.24}$$

onde:

$V_{3,1}$ = potencial em 3 devido a Q_1.
$V_{3,2}$ = potencial em 3 devido a Q_2.

O trabalho para mover n cargas será:

$$W_E = Q_2 . V_{2,1} + Q_3 . V_{3,1} + Q_3 . V_{3,2} + \ldots + Q_n . V_{n,1} + \ldots + Q_n . V_{n,n} \quad (J) \tag{5.25}$$

W_E é a energia potencial armazenada no campo. Tomemos agora um termo qualquer da equação acima :

$$Q_3 . V_{3,1} = Q_3 . \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 . R_{13}} = Q_1 . \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 . R_{31}} = Q_1 . V_{1,3} \tag{5.26}$$

$V_{1,3}$ é o potencial no ponto 1 devido à carga Q_3.

Assim, a equação 5.25 é reescrita como:

$$W_E = Q_1 . V_{1,2} + Q_1 . V_{1,3} + .. + Q_1 . V_{1,n} + Q_2 . V_{2,1} + Q_2 . V_{2,3} + .. + Q_2 . V_{2,n} + Q_{n-1} . V_{n-1,n} \tag{5.27}$$

Adicionando 5.25 e 5.27:

$$\begin{aligned} 2W_E = Q_1 (V_{1,2} + V_{1,3} + \ldots + V_{1,n}) + Q_2 (V_{2,1} + V_{2,3} + \ldots + V_{2,n}) + \\ \ldots + Q_n (V_{n,1} + V_{n,2} + \ldots + V_{n,n-1}) \end{aligned} \tag{5.28}$$

Cada soma entre parêntesis, representa o potencial em cada ponto, devido à todas as cargas exceto à carga que está no ponto onde está sendo calculado o potencial.

$$V_{1,2} + V_{1,3} + \ldots + V_{1,n} = V_1 \tag{5.29}$$

Assim:

$$W_E = \frac{1}{2}\left(Q_1 . V_1 + Q_2 . V_2 + \ldots + Q_n . V_n\right) \quad (J) \tag{5.30}$$

$$W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i . V_i \quad (J) \tag{5.31}$$

Substituindo cada carga por um volume infinitesimal Δv, multiplicado por uma densidade de carga ρ, e fazendo o número de cargas tender ao infinito ($\Delta v \rightarrow dv$):

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \rho V dv \quad (J) \tag{5.32}$$

Substituindo ρ por $\nabla.\vec{D}$:

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \left(\nabla.\vec{D}\right) V dv \quad (J) \tag{5.33}$$

Entretanto, a seguinte identidade vetorial é válida para qualquer função vetorial $\vec{D}$:

$$\nabla.\left(V\vec{D}\right) = V\left(\nabla.\vec{D}\right) + \vec{D}.(\nabla V) \tag{5.34}$$

Portanto:

$$W_E = \frac{1}{2}\int\left[\nabla.\left(V\vec{D}\right) - \vec{D}.(\nabla V)\right]dv \quad (J) \tag{5.35}$$

A primeira integral de volume da equação acima pode ser substituida por uma integral de superfície, utilizando-se o teorema da divergência:

$$W_E = \frac{1}{2}\oint_s \left(V\vec{D}\right)dS - \frac{1}{2}\int_{vol} \vec{D}.(\nabla V)dv \quad (J) \tag{5.36}$$

A equação 5.35 é uma integral de volume. A única restrição é que este volume contenha toda a carga, ou seja, não pode haver cargas fora deste volume. Nada nos impede de considerar este volume como sendo todo o universo. Portanto, V na superfície que envolve este volume pode ser considerado nulo ($\vec{D}$ também). Portanto, a primeira integral em 5.35 é nula. Por outro lado, sabemos que $\nabla V = -\vec{E}$. Portanto:

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol}\left(\vec{D}.\vec{E}\right)dv = \frac{1}{2}\int_{vol} \varepsilon_0 E^2 dv \quad (J) \tag{5.37}$$

Derivando a equação acima em relação ao volume teremos:

$$\frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad (J/m^3) \tag{5.38}$$

que é a densidade de energia armazenada no campo elétrico.

Exemplo 5. 3

Calcular a energia armazenada em uma seção de um capacitor co-axial de L m de comprimento, raio interno a m e externo b m.

Solução

A expressão para o campo elétrico no interior do capacitor é:

$$\vec{E} = \frac{a.\rho_s}{\varepsilon_0.r}.\hat{a}_r \quad (V/m)$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_0^L\int_a^b\int_0^{2\pi} \varepsilon_0 \frac{a^2.\rho_s^2}{\varepsilon_0^2.r^2}.r.d\phi.dr.dz \quad (J)$$

$$W_E = \int_0^L\int_a^b\int_0^{2\pi} \frac{a^2.\rho_s^2}{\varepsilon_0.r}.d\phi.dr.dz$$

$$W_E = \frac{1}{2}.L.2\pi.\frac{a^2.\rho_s^2}{\varepsilon_0}\int_a^b\frac{dr}{r} = \frac{\pi.L.a^2.\rho_s^2}{\varepsilon_0}.\ln\frac{b}{a} \quad (J)$$

EXERCÍCIOS

1)-A direção da linha formada pela intercessão de uma superfície equipotencial e o plano **z** = 1 m no ponto (2, -6,1) m é a do vetor $6\hat{a}_x + 2\hat{a}_y$. Se a máxima taxa de variação de V é 500 V/m, com $E_z = 0$ e com $E_x > 0$, encontre $\vec{E}$.

2) - No campo potencial $V = 5r^2$ que quantidade de cargas está localizada na origem ?

3) - a porção de um potencial bidimensional ($E_z = 0$) é mostrada na figura 2. O espaçamento entre as linhas (horizontais e verticais) é de 1 mm. Determine $\vec{E}$ em coordenadas cartesianas em a e b.

4) - Quatro cargas idênticas Q = 3 nC são colocadas no vértice de um quadrado de 0.6 m de lado, uma de cada vez. Calcule a energia do sistema, logo após cada carga ser colocada.

5) - Dado o campo elétrico $\vec{E} = -5e^{-r/a}.\hat{a}_r$ em coordenadas cilíndricas, calcule a energia armazenada no volume descrito por r ≤ 2a m, 0 ≤ z 5a m .

6) - Dado um potencial definido por $V = 3x^2 + 4y^2$ (V), calcule a energia armazenada no volume definido por um cubo de 1 m de aresta, com um dos vértices na origem.

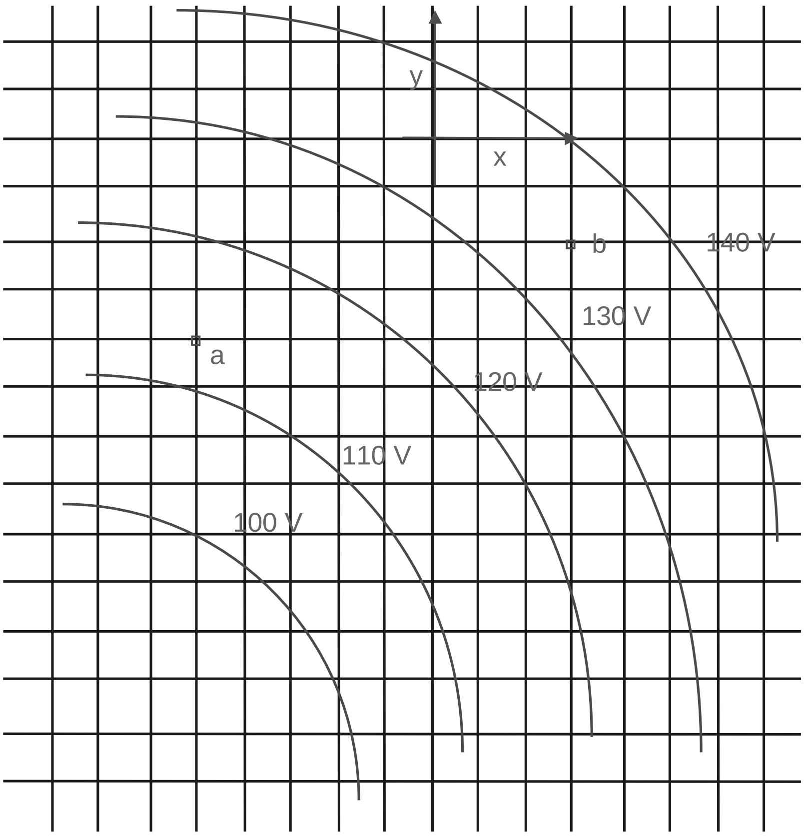

figura 2 - figura do problema 3