6 CORRENTE ELÉTRICA

Nos capítulos anteriores estudamos os campos eletrostáticos, gerados a partir de distribuições de cargas elétricas estáticas. Neste capítulo iniciaremos o estudo da corrente elétrica, que nada mais é do que o movimento de cargas elétricas. Estudaremos os fenômenos devido à corrente elétrica estacionária, ou seja, que não varia com o tempo. Campos elétricos gerados por correntes estacionárias também são campos eletrostáticos.

6.1 - CORRENTE ELÉTRICA E DENSIDADE DE CORRENTE

Referindo-se à figura 6.1, suponha que uma carga de teste q seja introduzida em um campo elétrico $\vec{E}$. Esta carga deve sofrer a ação de uma força $\vec{F}$ que é dada por:

$$\vec{F}=q\vec{E} \ (N) \tag{6.1}$$

Se a carga é livre para se mover, ela sofrerá uma aceleração que, de acordo com a segunda lei de Newton é dada por :

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m} \ (m/s^2) \tag{6.2}$$

onde m é a massa da partícula de carga em quilogramas.

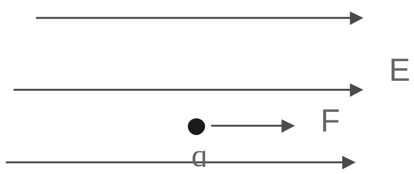

figura 6.1 - Força sobre uma partícula em um campo elétrico.

Na ausência de restrições, a velocidade da partícula aumentará indefinidamente com tempo, uma vez que o campo elétrico $\vec{E}$ é constante. Entretanto, em meios líquidos, sólidos ou gasosos, a partícula colidirá repetidamente com outras partículas, perdendo parte de sua energia, e sofrendo mudanças aleatórias na direção de seu movimento. Se o campo $\vec{E}$ é constante e o meio for homogêneo, essas colisões restringirão o movimento da carga a uma velocidade média constante, chamada de velocidade de deslocamento $\vec{v}_d$. Essa velocidade de deslocamento tem a mesma direção do campo elétrico, e se relaciona com ele através de uma constante chamada de constante de mobilidade μ. Assim:

$$\vec{v}_d = \mu \vec{E} \ (m/s) \tag{6.3}$$

Suponha agora um meio com seção uniforme A, conforme a figura 6. 2 Esse meio possui inúmeras cargas livres, com uma densidade volumétrica de cargas ρ. Fixando-se uma referência em um ponto qualquer do meio em questão, o número de cargas que atravessar a seção uniforme A em um segundo constituirá uma corrente elétrica I Coulombs/segundo, que será dada pela expressão:

$$I = \vec{v}_d \rho A \ (A) \tag{6.4}$$

onde:

I	(A)	Corrente elétrica
$\vec{v}_d$	(m/s)	Velocidade de deslocamento
ρ	(C/m^3)	Densidade volumétrica de cargas
A	(m^2)	Área atravessada

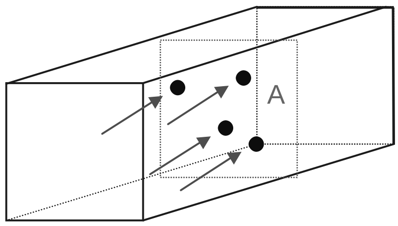

figura 6.2 - cargas cruzando uma seção reta em um condutor

Dividindo-se a equação 6.4 pela área da seção reta A, tem-se a densidade de corrente $\vec{J}$, em Ampéres por metro quadrado:

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \ (A/m^2) \tag{6.5}$$

Se a corrente não for uniforme, devemos considerar o vetor densidade de corrente $\vec{J}$ variará de um ponto para outro. Isto pode ser definido pelo o quociente de uma corrente incremental ΔI pela área incremental ΔS. Fazendo ΔS tender a zero, teremos:

$$\vec{J} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{I}}{\Delta S} \ (A/m^2) \tag{6.6}$$

A superfície ΔS é normal à direção da corrente. Portanto a densidade de corrente $\vec{J}$ é um vetor que tem magnitude igual à densidade de corrente no ponto em que se deseja conhecê-la, e a direção da corrente neste ponto.

6.2 - CORRENTE DE CONVECÇÃO E CORRENTE DE CONDUÇÃO

A expressão para a densidade de corrente obtida na equação 6.6 representa uma corrente de convecção, que é a translação de elétrons ou íons (como o que ocorre no interior de um tubo de raios catódicos, ou em uma lâmpada fluorescente). A corrente de convecção é linearmente proporcional à densidade de cargas e à velocidade dessas cargas.

Se substituirmos a velocidade de deslocamento $\vec{v}_d$ por $\mu\vec{E}$, teremos:

$$\vec{J} = \rho\mu\vec{E} \ (A/m^2) \qquad (6.7)$$

O produto $\rho\mu$ é definido como sendo a condutividade σ do material, e a expressão acima torna-se:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \ (A/m^2) \qquad (6.8)$$

A expressão acima representa uma corrente de condução, que pode ser definida como sendo o movimento de cargas que se alinham com a atuação de um campo elétrico externo. Assim a densidade de corrente de condução num meio à temperatura constante é linearmente proporcional a $\vec{E}$. A relação acima é valida para os meios eletricamente lineares, ou ohmicos. São meios eletricamente lineares, por exemplo, todos os metais.

Fixando e Memorizando ...

Antes de prosseguir, tome o seu caderno de estudos e execute sequencialmente as seguintes atividades:

1. Obtenha a expressão para o vetor densidade de corrente, conforme foi apresentado na seção 6.1.
2. Explique essa expressão, no que diz respeito ao seu módulo e direção.
3. Explique o que é corrente de convecção.
4. Escreva a Equação para a corrente de convecção.
5. Explique o que é corrente de condução
6. Escreva a equação para a corrente de condução.

Exemplo 6.1

Calcular a velocidade média dos elétrons (módulo), num condutor circular de cobre de 1,5 mm^2 de seção, percorrido por uma corrente contínua de 15 A, temperatura ambiente de 20 ºC.

Dados: $\sigma_{cobre} = 5{,}8 \times 10^7$ S/m, $\mu_{p,cobre} = 0.0032\ m^2/Vs$

solução

$$J_c = \frac{I}{S} = \frac{15}{1{,}5x10^{-6}} = 10^7\ A/m^2$$

$$\vec{J}_c = \sigma\vec{E} \Rightarrow E = \frac{10^7}{5{,}8x10^7} = 0.1724 V/m$$

$$\vec{v}_d = \mu\vec{E} \Rightarrow v_d = 0.0032x0.1724 = 0.00055 m/s$$

Exemplo 6.2

Determine a corrente total que atravessa uma seção de 1 cm de uma superfície cilíndrica de raio r = 2 mm, se as expressões válidas para pontos próximos desse raio forem:

a) - $J_r = \frac{1}{r}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) A/m^2, -\pi < \phi < \pi$

b) - $\rho = \frac{10^{-7}}{r} C/m^3, v_{d(r)} = 3x10^{10} r^2 m/s$

solução

a) -

$$I = \oint_S \vec{J}.d\vec{S}$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{0.01} \frac{1}{r}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) r d\phi dz\ (A)$$

$$I = 0{,}01\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)d\phi = 0{,}01x2\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\frac{1}{2}d\phi\ (A)$$

$$I = 0{,}01x2x\,sen\left(\frac{\phi}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0{,}01x2x2 = 0.040\ (A)$$

b) -

$$\vec{J} = \rho\vec{v}_d = \frac{10^{-7}}{r}3x10^{10} r^2\ (A/m^2)$$

$$\vec{J} = 10^{-7} x3x10^{10} x0{,}002 = 6\ (A/m^2)$$

$$I = \int_s \vec{J}.d\vec{S} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{0{,}01} 6rd\phi dz\ (A)$$

$$I = 6x2x10^{-3} x0{,}01\int_{-\pi}^{\pi} d\phi = 1{,}2x10^{-4} x2\pi\ (A)$$

$$I = 0{,}754\,(mA)$$

6.3 - EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

O princípio da conservação de cargas estabelece que cargas elétricas não podem ser criadas ou destruídas, embora quantidades iguais de cargas positivas e negativas possam ser "criadas" por separação, e "destruídas" ou perdidas por recombinação. A equação da continuidade decorre deste princípio, quando consideramos uma região confinada por uma superfície fechada.

Imagine uma superfície fechada S, atravessada por uma densidade de corrente $\vec{J}$. A corrente total que atravessará essa superfície será:

$$I = \oint_S \vec{J}.d\vec{S} \quad (A) \tag{6.9}$$

Este é o fluxo para fora de cargas positivas (isso é uma mera arbitrariedade, na verdade as cargas que se movimentam são elétrons, que possuem carga negativa), que deve ser balanceado por um decréscimo de cargas positivas (ou acréscimo de cargas negativas) no interior da superfície.

Dentro da superfície fechada, a carga Q decrescerá então, numa razão -dQ/dt, e o princípio da conservação de cargas estabelece então:

$$I = \oint_S \vec{J}.d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} \tag{6.10}$$

Aplicando o teorema da divergência à integral acima, e representando a carga envolvida pela integral de volume da densidade de carga :

$$\int_{vol} \left(\nabla.\vec{J}\right) = -\frac{d}{dt}\int_{vol} \rho dv \tag{6.11}$$

Concordando-se em manter a superfície constante, a derivada transforma-se em uma derivada parcial, e pode ser colocada dentro da integral:

$$\int_{vol} \left(\nabla.\vec{J}\right).dv = -\int_{vol} \frac{\partial \rho}{\partial t}.dv \tag{6.12}$$

Uma vez que a expressão acima é válida para qualquer volume, ela é verdadeira para um volume incremental Δv. Portanto:

$$\left(\nabla.\vec{J}\right)\Delta v = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta v \tag{613}$$

de onde sai a forma pontual da equação da continuidade :

$$\nabla.\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{6.14}$$

Exemplo 6.3

A densidade volumétrica de cargas numa certa região do espaço está decrescendo a uma taxa de $2x10^8$ C/m^3.s.

a) - Qual é a corrente total que atravessa uma superfície esférica incremental de raio 10^{-5} m?

b) - Qual é o valor médio da componente da densidade de corrente dirigida para fora, atravessando a superfície esférica ?

solução

a) -

$$\nabla.\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \Rightarrow \nabla.\vec{J} = 2x10^8$$

$$I = \int_S \vec{J}.d\vec{S} = \int_{vol} \left(\nabla.\vec{J}\right)dv = \int_{vol} 2x10^8\,dv \quad (A)$$

$$I = 2x10^8 \int_{vol} dV = 2x10^8 x \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (A)$$

$$I = \frac{8\pi}{3} x10^8 x(10^{-5})^2 \Rightarrow I = 0{,}834 \quad (\mu A)$$

b) -

$$I = \int_{vol} \vec{J}.d\vec{S} \quad (A)$$

$$0{,}838x10^{-6} = \int_{vol} \vec{J}.d\vec{S}$$

$$0{,}838x10^{-6} = Jx4\pi r^2 \Rightarrow J = \frac{0{,}838x10^{-6}}{4\pi(10^{-5})^2} \quad (A/m^2)$$

$$J = 0{,}667x10^4 \Rightarrow J = \frac{2}{3} \quad (kA/m^2)$$

6.4 - TEMPO DE RELAXAÇÃO

Suponhamos que uma região condutora e isolada esteja em equilíbrio. Se injetarmos uma carga inicial de densidade ρ_0 ela deverá "escoar", ou seja, a região deverá voltar ao equililibrio. Podemos chegar a essa conclusão a partir da última equação da seção anterior.

$$\nabla.\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{6.15}$$

Porém:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \ (A/m^2) \tag{6.16}$$

e

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \ (V/m) \tag{6.17}$$

Portanto:

$$\vec{J} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{D} \ (A/m^2) \tag{6.18}$$

Assim:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon}\nabla.\vec{D} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{6.19}$$

A equação acima é uma equação diferencial cuja solução é:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \tag{6.20}$$

A razão ε/σ é chamada de constante de tempo de relaxação .

Exemplo 6.4

Uma carga com densidade inicial ρ_0 C/m^3 é colocada em um material condutor (cobre) isolado e em equilíbrio. Determine o tempo necessário para que a densidade de carga caia a 1/3 de seu valor inicial, sabendo que σ_{cu} = 5,8x10^7 S/m.

Solução

$$\rho = \frac{1}{3}\rho_0$$

$$\frac{1}{3}\rho_0 = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t \ln(e)$$

$$-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t = -1{,}1 \Rightarrow -\frac{5{,}8x10^7}{8{,}85x10^{-12}} t = -1{,}1 \text{ (s)}$$

$$t = 1{,}57x10^{-19} \text{ (s)}$$

Pelo exemplo que acabamos de resolver, podemos perceber que, exceto por um período transitório extremamente rápido, ρ = 0 no interior de regiões condutores. Portanto:

$$\nabla.\vec{J} = 0 \tag{6.21}$$

EXERCÍCIOS

1) -Um condutor de cobre tem seção reta circular de 5,00 mm de diâmetro, e suporta uma corrente de 30 A. Qual é a porcentagem de elétrons de condução que deixa o condutor em cada segundo (sendo substituídos por outros), em 200 mm de condutor ? Dados N (Número de Avogadro) = 6,02 x 10^{26} átomos/kmol, peso específico do cobre = 8,96 e peso atômico 63,54. Suponha um elétron de condução por átomo.

2) - Que corrente irá resultar se todos os elétrons em um centímetro cúbico de alumínio passam por ponto especificado em 3 s ? Suponha um elétron de condução por átomo.

3) - Qual é a densidade de elétrons livres em um metal para uma mobilidade de 0,0046 m^2/V.s e uma condutividade de 30 MS/m ?

4) - Calcule a mobilidade dos elétrons de condução no alumínio, dada uma condutividade de 38,2 MS/m e densidade de elétrons de condução de 1,70 x 10^{29} m^{-3} ?

5) - Uma barra de cobre de seção reta retangular de 0,03 mm$\times$0,12 mm e 3,0 m de comprimento tem um queda de tensão de 100 mV. Calcule a resistência, corrente, densidade de corrente, módulo do campo elétrico e velocidade de deslocamento dos elétrons de condução.

6) - Encontre a corrente total num condutor circular de raio 3 mm se a densidade de corrente varia com r, de acordo com J = $10^3/r$ (A/m^2).

7)- Em coordenadas cilíndricas, para a região $0.02 \le r \le 0.03$ mm, $0 \le z \le 1$ m, $\vec{J} = 10e^{-100r}\hat{a}_\phi$ (A/m^2), Encontre a corrente total que atravessa a interseção desta região com o plano ϕ = constante.

8) - Calcule a corrente total que sai de um cubo de 1 m^3 com um vértice na origem, e lados paralelos ao eixos coordenados, se $\vec{J} = 2x^2\hat{a}_x + 2xy^3\hat{a}_y + 2xy\hat{a}_z \ (A/m^2)$.