8 RESISTÊNCIA E CAPACITÂNCIA

8.1 - RESISTÊNCIA E LEI DE OHM

No capítulo 6 definimos a equação $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ como sendo uma densidade de corrente de condução. Multiplicando ambos os lados por uma área S, ela ficará:

$$\vec{J}.S=\sigma S\vec{E} \text{ (A)} \tag{8.1}$$

$$I=\sigma SE \text{ (A)} \tag{8.2}$$

Se o campo elétrico for uniforme, ele pode ser definido como sendo o quociente da diferença de potencial entre dois pontos, pela distância entre eles. Então:

$$I=\frac{\sigma SV}{L} \text{ (A)} \tag{8.3}$$

O termo $\sigma S/L$ é o inverso da resistência R do material. Portanto, a equação 8.3 nada mais é do que a conhecida lei de Ohm:

$$I=\frac{V}{R} \text{ (A)} \text{ ; } R=\frac{V}{I} \text{ (}\Omega\text{)} \tag{8.4}$$

E a equação $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ também pode ser definida como a lei de Ohm na forma pontual.

O termo $\sigma S/L$ permite calcular a resistência de uma amostra de material, em função de suas características elétricas e de sua geometria. A equação 8.4 define a resistência elétrica como sendo o quociente entre duas grandezas escalares, V e I. Se substituirmos a diferença de potencial V pela integral ao longo de um caminho do vetor intensidade de campo elétrico, e a corrente por uma integral de superfície do densidade de corrente (também expresso em termos do vetor intensidade de campo elétrico), teremos uma expressão para a resistência elétrica em termos do campo elétrico. Essa expressão é muito útil para o cálculo de resistência de configurações mais complexas, como veremos nos exemplos 8.1, 8.2, 8.3.

$$R = \frac{-\int_a^b \vec{E}.d\vec{L}}{\int \sigma \vec{E}.d\vec{S}} \ (\Omega) \qquad (8.5)$$

Fixando e Memorizando ...

Antes de prosseguir, refaça em seu caderno de estudos as passagens para obter a equação 8.5, partindo da expressão para a corrente de condução.

`Exemplo 8.1`

Considere dois cilindros condutores concêntricos de raios a m e b m (cabo coaxial), conforme a figura 8.1. Existe um diferença de potencial entre eles, e em consequencia estabelecer-se-á uma corrente de fuga entre o condutor interno e o condutor externo. Se a corrente de fuga for I A/m, e a condutividade do material igual a σ, calcule o valor da resistência de fuga.

Solução

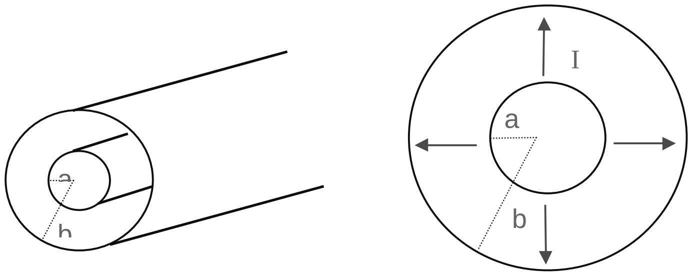

figura 8.1 - Cabo Co-axial

Pela simetria do problema, a corrente entre os dois condutores se distribui radialmente.

Vamos inicialmente calcular a densidade de corrente $\vec{J}$ em um ponto distante r do centro do cabo. Para um metro de cabo, a corrente de fuga total será:

$$I = \int \vec{J}.d\vec{S} \ (A)$$

$$I = J.2\pi r.1 \ (A)$$

$$\vec{J} = \frac{I}{2\pi r}.\hat{a}_r \quad (A/m^2)$$

O campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto r será, portanto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \ (V/m)$$

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi r\sigma}.\hat{a}_r \ (V/m)$$

A diferença de potencial entre os dois cilindros condutores é:

$$V_{ab} = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}.d\vec{r} \ (V)$$

$$V_{ab} = -\int_b^a \frac{I}{2\pi r\sigma}.dr \ (V)$$

$$V_{ab}=\frac{I}{2\pi\sigma}\ln\frac{b}{a}\ (V)$$

Portanto, a resistência de fuga por metro será:

$$R=\frac{V_{ab}}{I}=\frac{1}{2\pi\sigma}\ln\frac{b}{a}\ (\Omega)$$

Exemplo 8.2

Considere agora que o dielétrico entre os dois condutores é formado por dois meios, conforme a figura 8.2. calcule a resistência de fuga por metro de cabo co-axial.

Solução

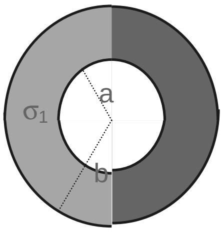

figura 8.2 - Cabo co-axial com 2 dielétricos em paralelo

A corrente se distribui radialmente. Como há dois meios diferente, podemos considerar que ela é a soma de duas correntes I_1 e I_1.

$$I=I_1+I_2\ (A)$$

A diferença de potencial entre os dois condutores é constante. Portanto:

$$R_1=\frac{V}{I_1}\ (\Omega)\ ;\ R_2=\frac{V}{I_2}\ (\Omega)$$

$$R_{eq}=\frac{V}{I}=\frac{V}{I_1+I_2}\ (\Omega)$$

$$R_{eq}=\frac{V}{V/R_1+V/R_2}\ (\Omega)$$

$$R_{eq}=\frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}\ (\Omega)$$

Por analogia com o exemplo anterior podemos escrever as expressões para R_1 e R_2:

$$R_1=\frac{1}{\pi\sigma_1}\ln\frac{b}{a}\ (\Omega)\ ;\ R_2=\frac{1}{\pi\sigma_2}\ln\frac{b}{a}\ (\Omega)$$

A resistência equivalente será:

$$R_{eq}=\frac{1}{\pi(\sigma_1+\sigma_2)}\ln\frac{b}{a}\ (\Omega)$$

Exemplo 8.3

Considere agora a configuração mostrada na figura 8.3. Calcular a resistência de fuga.

Solução

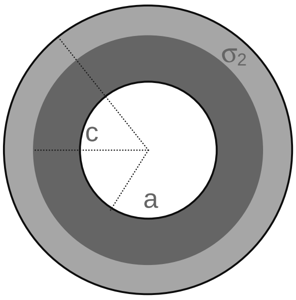

figura 8.3 - Cabo co-axial com dielétricos em série

As correntes nos meios 1 e 2 são iguais :

$$I=I_1=I_2 \ \text{(A)}$$

A diferença de potencial entre os condutores é:

$$V=V_1+V_2 \ \text{(V)}$$

$$V_1=R_1.I\ \text{(V)} \ ; \ V_2=R_2.I\ \text{(V)}$$

$$R_1.I+R_2.I=R_{eq}.I \ \text{(V)}$$

$$R_{eq}=R_1+R_2 \ (\Omega)$$

$$V_1=-\int_c^a \vec{E}_1.d\vec{r} \ \text{(V)}$$

$$V_1=\frac{I}{2\pi\sigma_1}\ln\frac{c}{a} \ \text{(V)}$$

$$V_2=\int_b^c \vec{E}_2.d\vec{r} \ \text{(V)}$$

$$V_2=\frac{I}{2\pi\sigma_2}\ln\frac{b}{c} \ \text{(V)}$$

$$R_1=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\ln\frac{c}{a}(\Omega);\ R_2=\frac{1}{2\pi\sigma_2}\ln\frac{b}{c}(\Omega)$$

$$R_{eq}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\sigma_1}\ln\frac{c}{a}+\frac{1}{\sigma_2}\ln\frac{b}{c}\right) \ (\Omega)$$

8.2 - CAPACITÂNCIA

Sejam dois condutores imersos em um dielétrico homogêneo. O condutor M_1 é carregado com uma carga de Q Coulombs positivos. Consequentemente, o uma carga de mesma magnitude, porém de sinal contrário será induzida no condutor M_2. Portanto uma diferença de potencial V será estabelecida entre esses dois condutores.

A capacitância C deste sistema é definida como :

$$C=\frac{Q}{V} \ \text{(F)} \tag{8.6}$$

Ou, termos do vetor intensidade de campo elétrico:

$$C=\frac{\oint \varepsilon\vec{E}.d\vec{S}}{-\int_{inf}^{sup}\vec{E}.d\vec{L}} \ \text{(F)} \tag{8.7}$$

Entende-se por a capacitância a capacidade de um sistema em armazenar energia em um campo eletrostático.

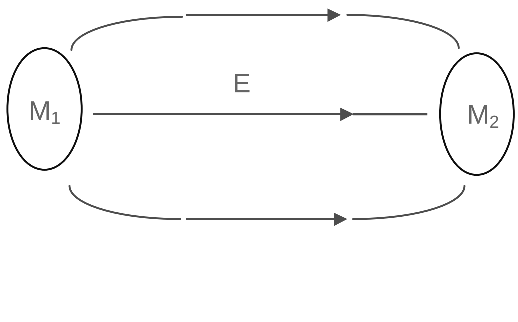

figura 8.4 - Dois condutores carregados, imersos em um dielétrico

Exemplo 8.4

O capacitor de placas paralelas. Duas placas paralelas iguais de área S, são separadas por um distância d. O dielétrico entre elas tem permissividade ε. Calcular a capacitância C.

Solução

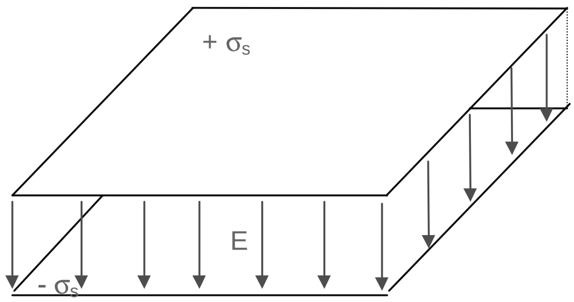

figura 8.5 - Capacitor de placas paralelas

$$C = \frac{Q}{V} \text{ (F)}$$

$$Q = \rho_s.S \text{ (C)}$$

$$V = -\int_{inf}^{sup} \vec{E}.d\vec{L} = -\int_{d}^{0} \frac{\rho_s}{\varepsilon}.dz \text{ (V)}$$

$$V = \frac{\rho_s d}{\varepsilon} \text{ (V)}$$

$$C = \frac{\rho_s S}{(\rho_s/\varepsilon)d} = \frac{\varepsilon S}{d} \text{ (F)}$$

independente de Q e V.

Exemplo 8.5

Suponha agora que dielétrico tenha a configuração mostrada na figura 8.6. Calcular a capacitância C.

Solução

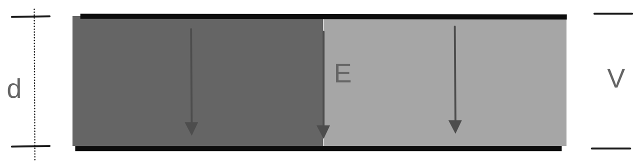

figura 8.6 - Capacitor com 2 dielétricos em paralelo.

Pelas condições de fronteira: $E_{t1} = E_{t2}$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$$

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 = \varepsilon_1 \vec{E} \ (C/m^2)$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2 = \varepsilon_2 \vec{E} \ (C/m^2)$$

Pela lei de Gauss:

$$\oint_s \vec{D}.d\vec{S} = Q \ (C)$$

$$\oint_{s1} \vec{D}_1.d\vec{S} = Q_1 \ (C)$$

$$\oint_{s2} \vec{D}_2.d\vec{S} = Q_2 \ (C)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \ (C)$$

$$\oint_{s1} \vec{D}_1.d\vec{S} + \oint_{s2} \vec{D}_2.d\vec{S} = Q \ (C)$$

$$D_1 S_1 + D_2 S_2 = Q \ (C)$$

$$\varepsilon_1 E.S_1 + \varepsilon_2 E.S_2 = Q \ (C)$$

$$(\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2)\frac{V}{d} = Q \ (C)$$

$$\frac{\varepsilon_1 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 S_2}{d} = \frac{Q}{V} \ (F)$$

$$C_1 + C_2 = C \ (F)$$

Exemplo 8.6

Suponha agora que o dielétrico tenha a configuração da figura 8.7. Calcular C.

Solução

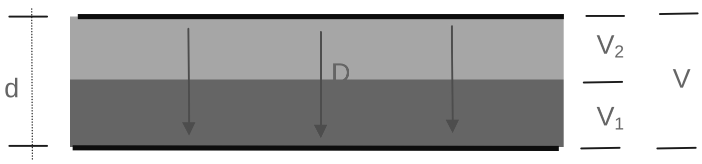

figura 8.7 - Capacitor com 2 dielétricos em série

Pelas condições de fronteira :

$$D_{n1} = D_{n2} = D$$

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \ (C/m^2)$$

$$V_1 = E_1 d_1 \ (V) \ ; \ V_2 = E_2 d_2 \ (V)$$

$$V = V_1 + V_2 \ (V)$$

$$V = \frac{D}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{D}{\varepsilon_2} d_2 \ (V)$$

Pela lei de Gauss:

$$\oint \vec{D}.d\vec{S} = Q \ (C)$$

$$D.S = Q \ (C) \Rightarrow D = \frac{Q}{S} \ (C/m^2)$$

$$V = Q\frac{d_1}{S\varepsilon_1} + Q\frac{d_2}{S\varepsilon_2} \ (V)$$

$$\frac{V}{Q} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 S}$$

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\ (1/F)$$

EXERCÍCIOS

1) - Calcule a resistência entre duas superfícies curvas concentricas, uma de raio r = 0.2 m, outra de raio 0.4 m, limitadas por um ângulo de 30º, se o material entre elas possui condutividade $\sigma = 6{,}17\times10^7$ S/m.

2) - Calcule a resistência de um condutor de alumínio de 2 m de comprimento, seção reta quadrada, sendo S = 1 mm^2 em uma extremidade, e aumentando linearmente até S = 4 mm^2 na outra extremidade.

3) - Por um defeito de fabricação, um cabo coaxial possui um deslocamento entre os centros dos condutores interno e externo conforme mostrado na figura 1. Determine a resistência de isolação por metro desse cabo. O dielétrico possui permissimivade relativa igual a 2.

4) - resolver o problema anterior, considerando os cabos concêntricos. Compare os resultados.

5) - Encontre a capacitância entre as superfícies condutoras externa e interna mostrada na figura 2.

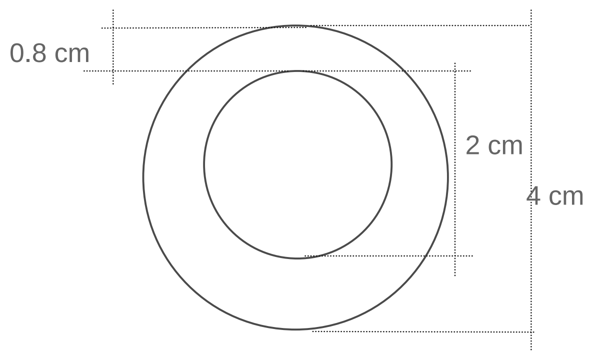

figura 1 - figura do problema 3

6) - Calcule a capacitância por unidade de comprimento entre um condutor cilindrico de 6 cm de diâmetro e um plano condutor, paralelo ao eixo desse cilindro, distante 10 m do mesmo.

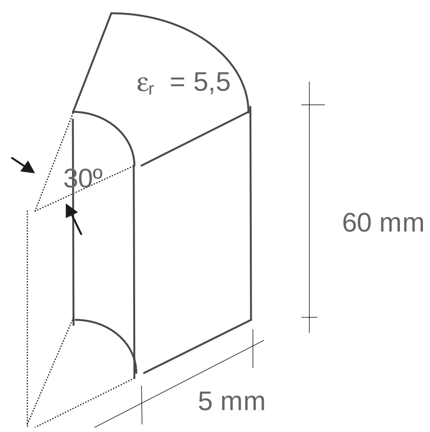

figura 2 - figura do problema 5

7) - Um capacitor de placas paralelas com área de 0,30 m^2 e separação 6 mm contém três dielétricos assim distribuídos : ε_{r1} = 3.0, com espessura de 1 mm. ε_{r2} = 4.5 com espessura de 2 mm e ε_{r3} = 6,0 com espessura de 3 mm. Aplicando-se uma ddp de 1200 V sobre o capacitor, encontre a diferença de potencial e o gradiente do potencial (intensidade do campo elétrico) em cada dielétrico.

8) - A figura 3 mostra um cabo coaxial cujo condutor interno possui raio de 0,6 mm e o condutor externo raio de 6 mm. Calcule a capacitância por unidade de comprimento com os espaçadores como indicado

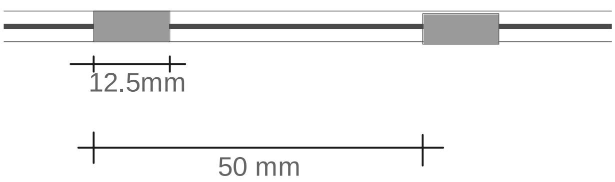

figura 3 - figura do problema 8

9) - Um cabo de potência blindado opera numa tensão de 12,5 kV no condutor interno em relação à capa cilíndrica. Existem duas isolações: a primeira tem permeabilidade relativa igual a 6,0, e é do condutor interno em r = 0,8 cm a r = 1,0 cm, enquanto que a segunda tem permeabilidade relativa igual a 3,0 e vai de r = 1,0 cm a r = 3,0 cm, que corresponde à superfície interna da capa externa. Encontre o máximo gradiente de tensão em cada isolação empregada.

10) - Um certo cabo de potência blindado tem isolação de polietileno para o qual ε_r = 3,26 e rigidez dielétrica 18,1 MV/m. Qual é o limite superior sobre o condutor interno em relação à blindagem quando o condutor interno possui raio de 1 cm e o lado interno da blindagem concêntrica apresenta raio de r = 8,0 cm ?