



## LEI DE BIOT-SAVART E FLUXO MAGNÉTICO

Ao final deste capítulo você deverá ser capaz de:

- Explicar a relação entre corrente elétrica e campo magnético.
- Equacionar a relação entre corrente elétrica e campo magnético, através das leis de Biot-Savart e Ampère.
- Definir fluxo magnético.
- Definir densidade de fluxo magnético.
- Provar que não existem cargas magnéticas isoladas

### 9.1 - INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores nós estudamos os campos elétricos devido à correntes estacionárias. Neste capítulo iniciaremos o estudo de campos magnéticos provocados por correntes elétricas estacionárias.

Em 1820 Oersted descobriu que a passagem de uma corrente elétrica de intensidade  $I$  A em um condutor produz um campo magnético à sua volta, campo este que deverá ser circular, conforme a figura 9.1.



figura 9.1 - Campo devido a uma corrente elétrica em um condutor.

A relação entre as direções do campo magnético e da corrente é dada pela regra da mão direita.

## 9.2 - A LEI DE BIOT-SAVART

---

A partir de medições do torque em uma agulha magnética, Jean Baptiste Biot, e Felix Savart descobriram, em 1820, que o campo magnético de um pequeno elemento condutor de comprimento  $\Delta L$  m, com uma corrente  $I$  A, conforme mostrado na figura 9.2, é:

$$\Delta H = \frac{1}{4\pi} \frac{I \Delta L \sin \theta}{r^2} \text{ (A / m)} \quad (9.1)$$

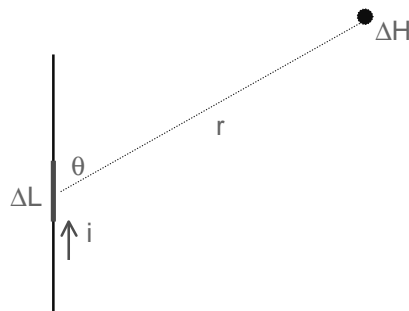


figura 9.2 - Campo magnético produzido por um elemento de condutor

Substituindo  $\Delta H$  por  $dH$  e  $\Delta L$  por  $dL$ , chegamos à Lei de Biot-Savart:

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{I dL \sin \theta}{r^2} \text{ (A / m)} \quad (9.2)$$

Em notação vetorial, a equação 9.2 pode ser escrita como:

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I(\vec{R} \times d\vec{L})}{|\vec{R}|^3} \text{ (A / m)} \quad (9.3)$$

onde:

$\vec{H}$	(A/m)	Vetor intensidade de campo magnético
$I$	(A)	Corrente elétrica
$\vec{R}$	(m)	Vetor com magnitude e direção da distância entre o ponto P e o elemento de corrente
$d\vec{L}$	(m)	Elemento de condutor, com direção da corrente

### 9.2.1 - Relação de Pyati - Uma Simplificação da Lei de Biot- Savart

---

O produto vetorial  $\vec{R} \times d\vec{L}$  na equação 9.3 produz um vetor na direção de  $d\vec{H}$ , que é perpendicular ao plano que contém  $\vec{R}$  e  $d\vec{L}$ . Na figura 9.3  $\vec{R}$  e  $d\vec{L}$  estão no plano  $yz$ , perpendicular à direção  $x$ . Portanto  $d\vec{H}$  está na direção  $x$ . Para esta condição, temos:

$$\frac{\vec{R} \times d\vec{L}}{|\vec{R}|^3} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \times \frac{d\vec{L}}{|d\vec{L}|} \frac{|d\vec{L}|}{|\vec{R}|^2} = \frac{a_r \times a_i |\vec{R}| d\theta}{|\vec{R}|^2} = a_x \frac{d\theta}{|\vec{R}|} \quad (9.4)$$

onde:

$\hat{a}_r$	Vetor unitário na direção de $\vec{R}$
$\hat{a}_i$	Vetor unitário na direção da corrente $I$
$\hat{a}_x$	Vetor unitário na direção $x$
$d\theta$	Ângulo subtendido por $dL$ , em radianos.

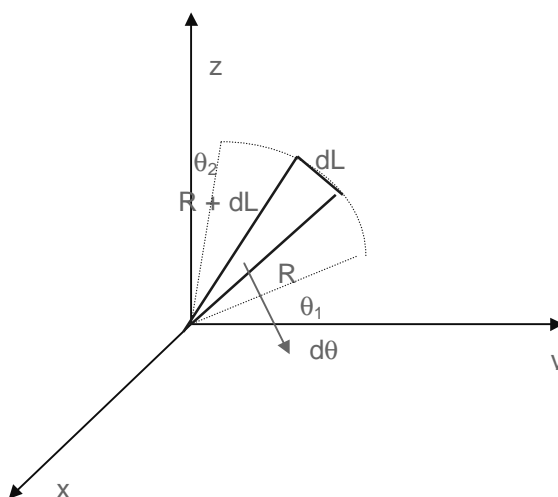


figura 9.3 - Elemento condutor de corrente e ponto P situados no mesmo plano.

Assim, para os casos onde o condutor e o ponto onde se deseja conhecer o campo magnético estejam no mesmo plano, a lei de Biot-Savart se simplifica a:

$$|dH| = dH_x = \frac{I}{4\pi} \frac{d\theta}{R} \quad (9.5)$$

Para um condutor longo, compreendido entre os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  (linha tracejada na figura 9.3, nós temos:

$$H_x = \frac{I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{R} \quad (9.6)$$

Esta é uma simplificação da lei de Biot-Savart proposta por V. Pyati na revista IEEE-Transactions on Education, vol E-29, fev. de 1986.

### Fixando e memorizando ...

Antes de prosseguir, refaça as passagens realizadas nesta seção:

1. Descreva como foi observada pela primeira vez a relação entre corrente elétrica e campo magnético.
2. Descreva a experiência de Biot e Savart, para quantificar a relação entre campo magnético e corrente elétrica.
3. Formule a lei de Biot-Savart
4. Obtenha a relação de Pyati.

### Exemplo 9.1

Encontrar o campo magnético  $H$  A/m a uma distância  $a$  m de um fio retilíneo infinitamente longo, percorrido por uma corrente  $I$  A.

### Solução

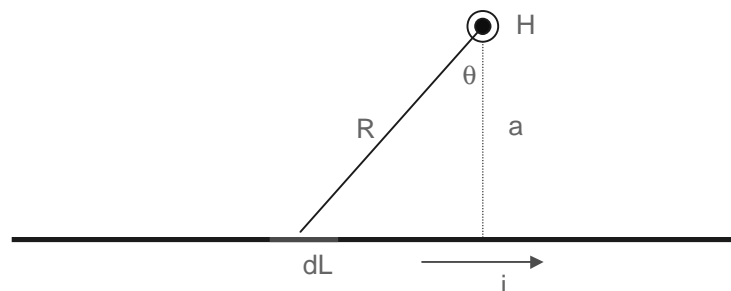


figura 9.4 - Campo magnético em um ponto, devido a um condutor retilíneo.

$$H = \frac{I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{R} \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos \theta}{a}$$

$$a = R \cos \theta \qquad H = \frac{I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{a}$$

$$R = \frac{a}{\cos \theta} \qquad H = \frac{I}{2\pi a} \text{ (A/m)}$$

### Exemplo 9.2

(a) Encontrar o campo magnético no centro de um anel de raio  $R$  m, percorrido por uma corrente  $I$  A. (b) Encontre  $H$  em um ponto  $z$  ao longo do eixo do anel.

### Solução

a)

$$H = \frac{I}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{I}{2R}$$

$$dH_z = \frac{IR}{4\pi r^3} dL$$

b)

$$dH_z = \frac{1}{4\pi} \frac{IdL \sin \theta}{r^2} \cos \gamma$$

$$dL = R d\phi$$

$$H_z = \frac{IR^2}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$H_z = \frac{IR^2}{\sqrt{(R^2 + z^2)^3}} \quad (\text{A/m})$$

$$\theta = 90^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{R}{r}$$

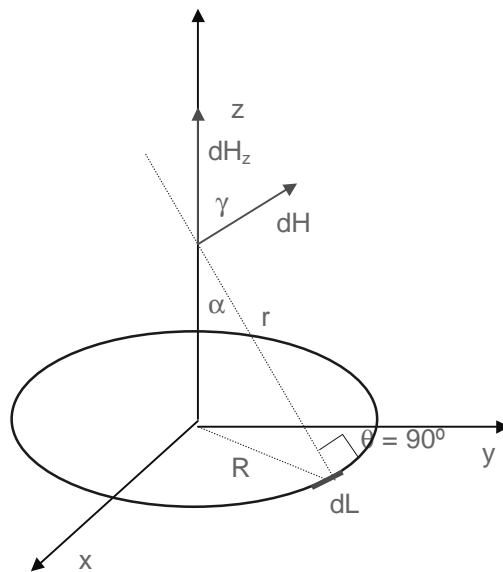


figura 9.5 - Campo magnético no eixo de um anel

### Refaça este exemplo ...

Antes de prosseguir, refaça o exemplo acima:

1. Faça o item a) utilizando a relação de Pyati.
2. utilizando a lei de Biot-Savart, expresse o diferencial para o vetor intensidade de campo magnético. Leve em conta que apenas a componente segundo o eixo z não se anula.
3. Substitua corretamente os ângulos.
4. Substitua corretamente o integrando, e integre.
5. Expresse o vetor intensidade de campo magnético em função de R e z.

## 9.3 - A LEI DE AMPÈRE

De acordo com o exemplo 9.1 a intensidade de campo magnético  $H$  a uma distância  $r$  de um fio reto e longo é:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (\text{Wb} / \text{m}^2) \quad (9.7)$$

onde  $I$  é a corrente que passa pelo condutor.

Se  $H$  for integrado ao longo de um caminho  $L$  circular de raio  $r$ , circundando o condutor, teremos:

$$\oint_1 \vec{H} \cdot d\vec{L} = \frac{I}{2\pi r} \oint_1 dL = \frac{I}{2\pi r} 2\pi r \quad (9.8)$$

$$\oint_1 \vec{H} \cdot d\vec{L} = I \quad (9.9)$$

A equação 9.9 é válida quando se considera qualquer caminho fechado  $L$ , e independe do meio. Essa relação é conhecida como a **Lei de Ampère**, e diz que:



**A integral de linha do vetor intensidade de campo magnético  $\vec{H}$  ao longo de um caminho fechado  $L$ , é igual a corrente total envolvida por esse caminho**

### Fixando e memorizando ...

Antes de prosseguir, refaça as passagens realizadas nesta seção:

5. A partir da expressão para a intensidade de campo magnético em um ponto distante  $r$  m de um condutor, obtenha a expressão para a lei de Ampère.
6. Enuncie a lei de Ampère.

### Exemplo 9.3

Um condutor sólido e cilíndrico é percorrido por uma corrente  $I$  A, que se distribui uniformemente sobre a seção circular do condutor. Encontre expressões para  $\vec{H}$  dentro e fora do condutor. Esboce graficamente a variação de  $\vec{H}$ , em função de  $r$ , sendo  $r$  medido a partir do centro do condutor.

### Solução

Fora do condutor,  $\vec{H}$  será:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{a}_\phi \quad (\text{A/m})$$

pois o caminho L engloba toda a corrente no condutor.

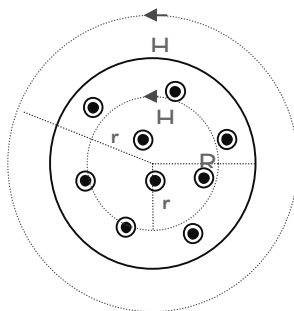


figura 9.9 - Condutor cilíndrico com corrente uniforme

Para o interior do condutor a corrente envolvida pelo caminho L será

$$I' = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (\text{A})$$

e a intensidade de campo magnético  $\vec{H}$  será:

$$\vec{H} = \frac{1}{2\pi r} I \frac{r^2}{R^2} \hat{a}_\phi = \frac{I}{2\pi R^2} r \hat{a}_\phi \quad (\text{A/m})$$

graficamente teremos:

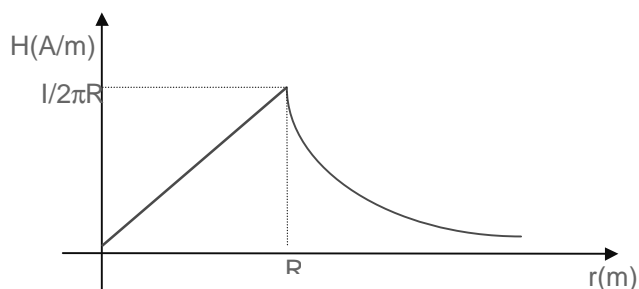


figura 9.6 - Variação de H dentro e fora do condutor

O exemplo 9.3 envolveu o cálculo do vetor intensidade de campo magnético no interior de um condutor. Para essas situações a lei de Ampère pode ser generalizada, substituindo a corrente I pela integral de um vetor densidade de corrente  $\vec{J}$  sobre uma superfície S. Portanto:

$$\oint_1 \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{A}) \quad (9.10)$$

Essa generalização da lei de Ampère se constitui numa das equações de Maxwell.

#### Exemplo 9.4

Considere um condutor cilíndrico de raio R m, transportando uma corrente cuja densidade na seção transversal é  $J_c = K \cdot r$  (A/m<sup>2</sup>), onde K é uma constante e r é a distância ao centro do condutor. Determine:

- O valor de H no interior do condutor.
- O valor de H exterior ao condutor
- Fazer o gráfico  $H = f(r)$

#### Solução

a)

$$\oint_1 \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

A intensidade de campo magnético é constante ao longo do círculo de raio r. Portanto:

$$H \oint_L dl = \int_0^r \int_0^{2\pi} K_c \cdot r \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$H \cdot 2\pi r = 2\pi \int_0^r K_c r^2 dr$$

$$H = \mu_0 K_c \frac{r^2}{3} \quad (\text{T})$$

b)

fora do condutor, a corrente será a corrente total :

$$I = K_c \cdot \frac{R^3}{3} \quad (\text{A})$$

$$\oint_1 H \cdot dL = I \quad (\text{A})$$

$$H = \frac{I}{2\pi r} K_c \frac{R^3}{3} \quad (\text{T})$$

Portanto, dentro do condutor o campo magnético varia com o inverso do quadrado da distância r, e fora do condutor a variação é com o inverso da distância.

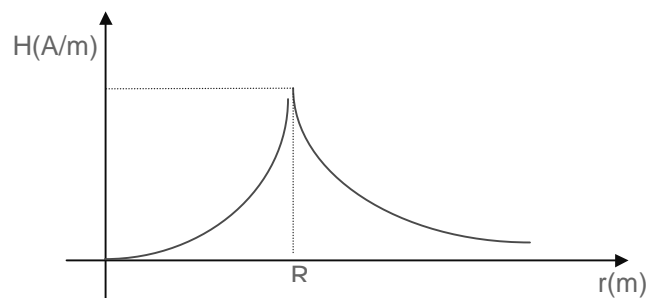


figura 9.7 - Variação de H dentro e fora do condutor

## 9.4 - FLUXO MAGNÉTICO $\phi_m$ E DENSIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO B



A passagem de uma corrente elétrica em um condutor produzirá campo em toda a região em volta do mesmo. Assim, podemos dizer que uma superfície de área  $A$  próxima ao condutor é atravessada por uma quantidade de fluxo magnético  $\phi_m$ , como pode ser visto pela figura 9.8.

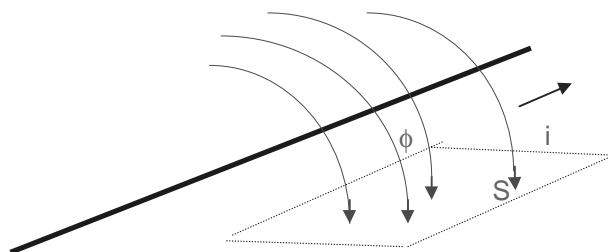


figura 9.8 - fluxo magnético atravessando uma superfície  $A$ .

Assim, podemos definir a densidade de fluxo magnético (ou indução magnética)  $B$  como sendo :

$$B = \frac{\phi_m}{A} \quad (9.11)$$

Na equação 9.8 assume-se que as linhas de campo magnético são perpendiculares a  $A$ . De uma forma mais genérica nós temos (fig. 9.9):

$$\phi_m = B \cdot A \cos \alpha \quad (9.12)$$

onde:

$\phi_m$	(Wb)	fluxo magnético através de $A$
$B$	(Wb/m <sup>2</sup> )	magnitude da densidade de fluxo magnético $B$ .
$\alpha$	rad	ângulo entre a normal à área $A$ e a direção de $B$ .

Se  $B$  não é uniforme sobre a área considerada, o produto da equação 9.8 deve ser substituído por uma integral de superfície:

$$\phi_m = \iint B \cos \alpha dS \quad (9.13)$$

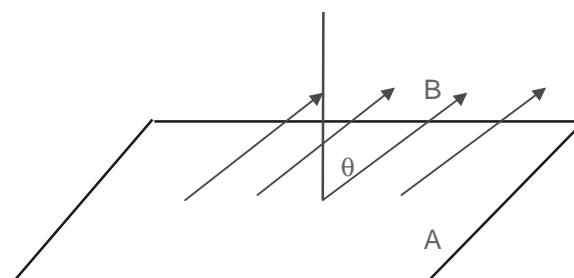


figura 9.9 - Fluxo magnético atravessando uma área A

A equação 9.13 pode ser escrita como um produto escalar. Assim:

$$\phi_m = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (9.14)$$

A relação entre o vetor intensidade de campo magnético,  $\vec{H}$ , e o vetor densidade de fluxo magnético ( ou vetor indução magnética)  $\vec{B}$ , é dada por :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (9.15)$$

onde  $\mu$  (Wb.A/m) é a permeabilidade magnética do meio.

#### 9.4.1 - Fluxo Magnético Sobre uma Superfície Fechada - Lei de Gauss para o Magnetismo

As linhas de fluxo de campos elétricos estáticos iniciam e terminam em cargas elétricas. Por outro lado, as linhas de fluxo de campos magnéticos são contínuas, isto é fecham-se em si mesmas. Isto significa também que não existem cargas magnéticas isoladas. Esta é uma diferença fundamental entre campos elétricos e campos magnéticos. Para descrever a natureza contínua do campo magnético, costuma-se dizer que a densidade de fluxo  $B$  é solenoidal (figura 9.10)

Uma vez que o fluxo magnético é contínuo, a mesma quantidade de fluxo que entra em uma superfície fechada deve deixá-lo. Em outras palavras, o fluxo líquido que atravessa uma superfície fechada é nulo. Matematicamente isso pode ser expresso como:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (9.16)$$

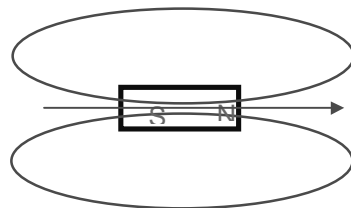


figura 9.10 - Linhas de fluxo fechando-se em si mesmas - um campo solenoidal

Aplicando sobre a equação 9.12 o teorema da divergência teremos:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.17)$$

As equações 9.16 e 9.17 descrevem a natureza contínua do fluxo magnético. Ambas são membros de um grupo de equações chamadas equações de Maxwell.

**Fixando e memorizando ...**

Antes de prosseguir, refaça as passagens realizadas nesta seção:

1. que é fluxo magnético ? Descreva intuitivamente.
2. Expresse matematicamente o fluxo magnético que passa por uma superfície aberta.
3. Prove que não existem cargas magnéticas isoladas (compare com a eletrostática)

**EXERCÍCIOS**

- 1)- Mostre que o campo magnético devido a um elemento de corrente finito mostrado na figura abaixo é dado por:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi r} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \hat{a}_\phi$$

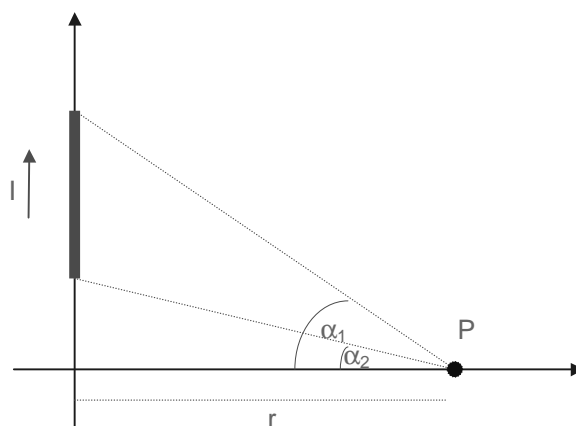
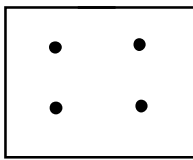


figura 1 - figura do problema 1

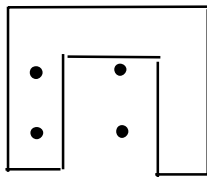
- 2) - Se  $\vec{B} = 3x\hat{a}_x + 5y\hat{a}_y + \hat{a}_z$ , encontre o fluxo magnético que atravessa a superfície de um volume limitado pelos planos  $x = 1$  m,  $x = 6$  m,  $y = 0$ ,  $y = 4$  m,  $z = 1$  m e  $z = 7$  m.
- 3) - Duas bobinas circulares com 500 mm de raio e 60 espiras cada uma são montadas ortogonalmente entre si, com o objetivo de neutralizar o campo magnético da terra em seu centro comum. Uma bobina é horizontal e a outra vertical. Encontre a corrente em cada bobina, se o campo magnético da terra na posição em que elas estão é de 1 Gauss ( $10^{-4}$  T), a um ângulo vertical de  $60^\circ$  com respeito a terra, e um ângulo horizontal de  $15^\circ$  a oeste da direção norte.
- 4) - Três enrolamentos simples com 1 m de raio estão colocados a 1 m um do outro, com os seus eixos coincidindo com o eixo z. Se todos os 3 são percorridos na mesma direção, faça

um gráfico normalizado da variação de B ( $B_{\max} = 1$ ), ao longo d eixo z, com o ponto inicial a 1 m do primeiro enrolamento, e o ponto final a um metro do terceiro enrolamento.

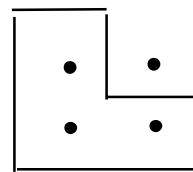
- 5) - Um fio flexível de comprimento L m é dobrado em um (a) círculo, (b) triângulo equilátero e (c) um quadrado. Encontre o valor de B no centro de cada configuração.
- 6) - Um condutor retilíneo conduz uma corrente de 4 mA. Uma espira circular de 12 mm de raio conduz uma corrente de 36 A. o eixo da espira coincide com o condutor retilíneo. Encontre B no plano da espira, a uma distância de 600 mm do condutor.
- 7) - Nas configurações abaixo, cada condutor conduz uma corrente I Ampéres. Qual é o valor da integral do vetor intensidade de campo magnético  $\vec{H}$  em cada caso ?



(a)



(b)



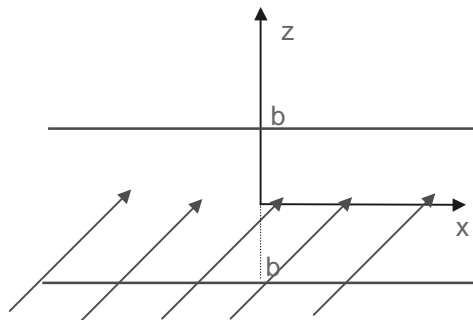
(c)

- 8) - Um condutor cilíndrico de raio 0.02 m possui um campo magnético interno:

$$1. \vec{H} = (4,77 \times 10^5) \left( \frac{r}{2} - \frac{r^2}{3 \times 10^{-2}} \right) \mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$$

Qual é a corrente total no condutor ?

- 9) - Em coordenadas cartesianas a região  $-b \leq z \leq b$  m. suporta uma densidade de corrente constante  $J = J_0 \hat{\mathbf{a}}_y$  ( $\text{A/m}^2$ ) (figura abaixo). Use a lei de Ampère para obter  $\vec{H}$  em todo o espaço.



2. figura 2 - figura do problema 2

- 10) - Um cabo coaxial com condutor interno de raio  $a$  m, condutor externo com raio interno  $b$  m e raio externo  $c$  m, é percorrido por uma corrente  $I$  A uniformemente distribuída (as direções em cada condutor são opostas entre si). Mostre que para  $b \leq r \leq c$  m :

$$3. \quad \vec{H} = \frac{1}{2\pi r} \left( \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right) \hat{a}_\phi$$