14 O ROTACIONAL E O TEOREMA DE STOKES

14.1 - O ROTACIONAL

A equação:

$$\oint_l \vec{H}.d\vec{L} = I \quad (A) \tag{14.1}$$

relaciona a integral de linha do vetor intensidade de campo magnético $\vec{H}$ ao longo de um caminho fechado L com a corrente total envolvida por esse caminho.

Embora relações envolvendo caminhos finitos sejam úteis em teoria de circuitos, é frequentemente desejável, na teoria de campos, relações que envolvam grandezas em um ponto no espaço. O **Rotacional** é uma relação pontual que pode ser utilizada para aplicar a lei de Ampére em um ponto.

Considere uma área incremental ΔS, em um meio condutor, atravessada perpendicularmente por uma corrente ΔI (figura 14.1)

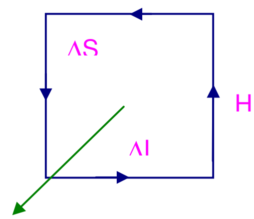

figura 14.1 - Superfície incremental atravessada por corrente

Aplicando a lei de Ampére, e dividindo por ΔS:

$$\frac{\oint_l \vec{H}.d\vec{L}}{\Delta S} = \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad (A/m^2) \tag{14.2}$$

Passando ao limite, com ΔS tendendo a zero:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_l \vec{H}.d\vec{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad (A/m^2) \tag{14.3}$$

O segundo membro da equação 14.3 é a densidade de corrente $\vec{J}$. O primeiro membro representa uma operação vetorial sobre um campo vetorial, denominada rotacional. Assim, podemos escrever:

$$\left(\mathrm{rot}\vec{H}\right)\hat{a}_n = \vec{J} \quad (A/m^2) \tag{14.4}$$

$\hat{a}_n$ indica que $\mathrm{rot}\vec{H}$ é um vetor perpendicular a ΔS e na direção de $\vec{J}$.

Vamos agora encontrar a expressão para $\text{rot}\vec{H}$ em termos das coordenadas x, y e z. Considere inicialmente uma área incremental formada pelos lados Δx e Δy, e a componente em x do vetor $\vec{J}$, J_X, perpendicular a ΔS.

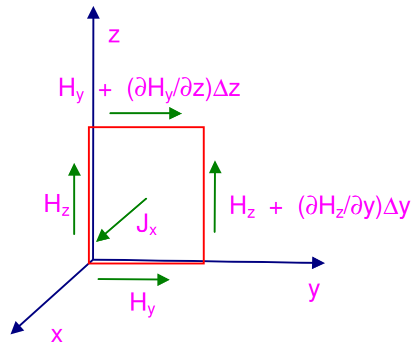

figura 14.2 - Circulação de $\vec{H}$ em uma superfície ΔS.

Aplicando a lei de Ampére:

$$\oint_l \vec{H}.d\vec{L} = I \quad (A) \tag{14.5}$$

$$H_y\Delta y + H_z\Delta z + \frac{\partial H_z}{\partial y}\Delta y\Delta z + (-H_y\Delta y - \frac{\partial H_y}{\partial z}\Delta z\Delta y) + (-H_z\Delta z) = J_x\Delta y\Delta z \tag{14.6}$$

Dividindo por ΔS:

$$\left(\text{rot}\vec{H}\right)\hat{a}_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \quad (A/m^2) \tag{14.7}$$

Semelhantementente, nas direções y e z teremos:

$$\left(\text{rot}\vec{H}\right)\hat{a}_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \quad (A/m^2) \tag{14.8}$$

$$\left(\text{rot}\vec{H}\right)\hat{a}_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \quad (A/m^2) \tag{14.9}$$

Assim:

$$\text{rot}\vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z = J_x\hat{a}_x + J_y\hat{a}_y + J_z\hat{a}_z \quad (A/m^2) \tag{14.10}$$

ou:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} \quad (A/m^2) \tag{14.11}$$

Lembrando que:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}(\ )\hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}(\ )\hat{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}(\ )\hat{a}_z \tag{14.12}$$

e:

$$\vec{H} = H_x\hat{a}_x + H_y\hat{a}_y + H_z\hat{a}_z \quad (A/m) \tag{14.13}$$

vamos fazer a operação $\nabla \times \vec{H}$:

$$\nabla \times H = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \tag{14.14}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x + \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z \tag{14.15}$$

ou:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (A/m^2) \tag{14.16}$$

Esta é a lei de Ampére na forma pontual.

Conceito	A circuitação do vetor intensidade de campo magnético $\vec{H}$ em uma superfície que tende a zero (caracterizando um ponto no espaço), dividida pela área dessa superfície, é o vetor densidade de corrente $\vec{J}$ neste ponto .

O conceito do rotacional pode também ser aplicado ao campo eletrosático:

$$\oint_l \vec{E}.d\vec{L} = 0 \tag{14.17}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{14.18}$$

Exemplo 14.1

Uma interpretação física do rotacional - Uma carga retangular leva água na direção do eixo x. a largura da calha é b m. Achar o rotacional da velocidade da água, que é expressa por:

$$\vec{V} = k\,\text{sen}(\frac{\pi}{b}y)\hat{a}_x \quad (m/s)$$

Solução

O rotacional da velocidade será:

$$\nabla \times \vec{V} = -\frac{\partial V_x}{\partial y}\hat{a}_z \quad (m/s^2)$$

As demais derivadas são nulas, porque a velocidade só possui a componente em x, e só varia na direção y

.

$$\nabla \times \vec{V} = -\frac{k\pi}{b}\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\hat{a}_z \quad (m/s^2)$$

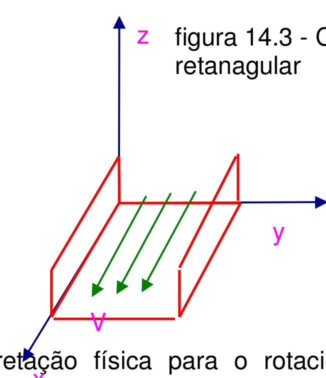

figura 14.3 - Calha retanagular

Uma interpretação física para o rotacional da velocidade neste exemplo pode conseguida com o auxílio de de um pequeno aparelho medidor de rotacional, que denominaremos "rotacionâmetro", mostrado na figura 14.4. Se colocarmos este aparelho dentro da calha, com seu eixo vertical ao longo do eixo z, ele girará no sentido horário quando estiver à esquerda do centro da calha, e no sentido anti-horário quando estiver à direita do centro da calha, correspondendo a valores positivos e negativos do rotacional. Quando estiver no centro da calha ele não girará, visto que as forças que atuam nas pás estarão em equilíbrio. Também podemos deduzir que ele girará mais rapidamente quando estiver nas bordas da calha, decaindo a velocidade até zero no centro da calha.

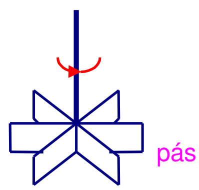

figura 14.4 - medidor de rotacional

Sabendo que a velocidade da água é nula nas paredes da calha, é possível, com a ajuda desse pequeno aparelho, determinar a velocidade da água em cada ponto da calha.

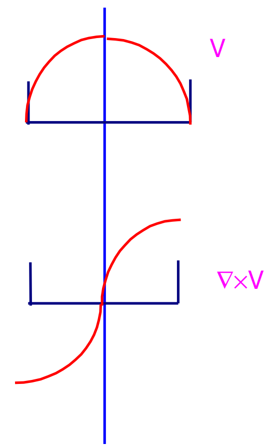

figura 14.5 - gráficos da velocidade e rotacional no exemplo 14.1

Exemplo 14.2

Considere um condutor cilíndrico com raio R m, percorrido por uma corrente I A, uniformemente distribuída. Encontre $\nabla \times \vec{H}$ dentro e fora do condutor.

Solução

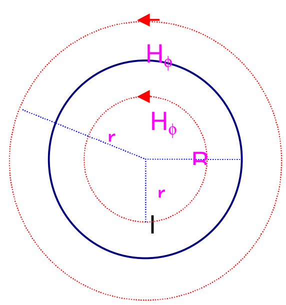

figura 14.6 - condutor percorrido por corrente I

O vetor intensidade de campo magnético será expresso em coordenadads cilíndricas:

$$\vec{H} = H_\phi \hat{a}_\phi \quad (A/m)$$

dentro do condutor H_ϕ vale:

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi R^2} r \quad (A/m)$$

e fora:

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r} \quad (A/m)$$

A expressão geral para o rotacional em coordenadas cilíndricas é:

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H\phi}{\partial z} \right) \hat{a}_r + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \hat{a}_\phi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r H_\phi}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \phi} \right) \hat{a}_z$$

Portanto, dentro do condutor:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 I}{2\pi R^2} \right) \hat{a}_z \quad (A/m^2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{I}{2\pi R^2} \hat{a}_z \quad (A/m^2)$$

ou:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (A/m^2)$$

Fora do condutor:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{rI}{2\pi r}\right)\hat{a}_z \quad (A/m^2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = 0$$

14.2 - O TEOREMA DE STOKES

Considere a superfície S**,** dividida em superfícies incrementais ΔS, mostrado na figura 14.7.

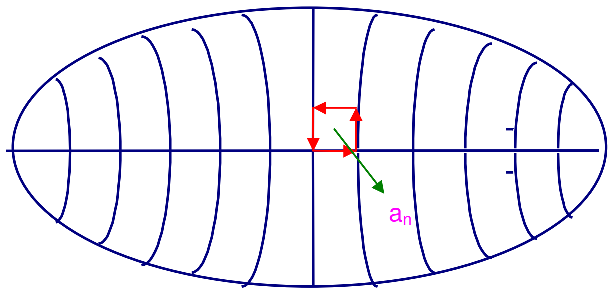

figura 14.7 - Superfície dividida em superfícies incrementais.

$$\frac{\oint_{\Delta S} \vec{H}.d\vec{L}}{\Delta S} = \left(\nabla \times \vec{H}\right)\hat{a}_n \quad (A/m^2) \tag{14.19}$$

ou

$$\oint_{\Delta S} \vec{H}.d\vec{L} = \left(\nabla \times \vec{H}\right)\hat{a}_n.\Delta S = \left(\nabla \times \vec{H}\right)\Delta S \tag{14.20}$$

Realizando uma circulação para todas as áreas incrementais, e somando os resultados, a maioria dos termos se cancelam, com exceção dos que estão no contorno da superfície S. Portanto:

$$\oint_l \vec{H}.d\vec{L} = \int_S \left(\nabla \times \vec{H}\right).d\vec{S} \quad (A) \tag{14.21}$$

A equação acima é chamada de **Teorema de Stokes**, e é válida para qualquer campo vetorial. Utilizando-o na lei de Ampére:

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{H}\right).d\vec{S} = \int_S \vec{J}.d\vec{S} = \oint_l \vec{H}.d\vec{L} \quad (A) \tag{14.22}$$

Pelas identidades acima percebemos que podemos facilmente partir da lei de Ampére na forma integral e chegar na sua forma pontual e vice-versa, utilizando o teorema de Stokes.

EXERCÍCIOS

1) - Dado o vetor genérico $\vec{A} = e^{-2z}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\phi\right)\hat{a}_\phi$ em coordenadas cilíndricas, calcule o rotacional de $\vec{A}$ em (0,8; π/3; 0,5).

2) - Dado o vetor genérico $\vec{A} = \frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{a}_r + \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r^3}a_\theta$, mostre que o rotacional de $\vec{A}$ é nulo para todo o espaço.

3) - Encontre $\vec{J}$ se (a) $\vec{H} = 3.\hat{a}_x + 7y.\hat{a}_y + 2x.\hat{a}_z$ (b) $\vec{H} = 6r.\hat{a}_r + 2r.\hat{a}_\phi + 5.\hat{a}_z$ e (c) $\vec{H} = 2r.\hat{a}_r + 3.\hat{a}_\theta + \cos\theta.\hat{a}_\phi$