15 EQUAÇÕES DE MAXWELL, POTENCIAL MAGNÉTICO E EQUAÇÕES DE CAMPO

15.1 - AS QUATRO EQUAÇÕES DE MAXWELL PARA CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS ESTACIONÁRIOS

Como pudemos observar em todo o desenvolvimento deste curso, as leis básicas do eletromagnetismo foram formuladas por cientistas do século passado, a partir da observação de fenômenos elétricos e magnéticos, e da pesquisa experimental. Com o auxílio das técnicas de cálculo, essas equações receberam uma apresentação formal mais elegante e sofisticada. Esse trabalho deveu-se a J. C. Maxwell, cientista inglês, e deu origem ao famoso grupo de equações chamado **Equações de Maxwell**.

As equações de Maxwell podem ser escritas tanto na forma integral, como na forma diferencial. Na forma diferencial elas são, pela ordem :

$$\nabla.\vec{D} = \rho \quad (C/m^3) \tag{15.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{15.2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (A/m^2) \tag{15.3}$$

$$\nabla.\vec{B} = 0 \tag{15.4}$$

Na forma integral temos:

$$\oint_s \vec{D}.d\vec{S} = \int_v \rho dv \quad (C) \tag{15.5}$$

$$\oint_l \vec{E}.d\vec{L} = 0 \tag{15.6}$$

$$\oint_l \vec{H}.d\vec{L} = \int_S \vec{J}.d\vec{S} \quad (A) \tag{15.7}$$

$$\int_s \vec{B}.d\vec{S} = 0 \tag{15.8}$$

Como pode ser visto das relações vetoriais que apresentamos (teorema da divergência, teorema de Stokes), qualquer dos conjuntos pode ser facilmente obtido, a partir do outro.

A interpretação física para a primeira equação (equações 15.1 e 15.5) é que pode existir cargas elétricas isoladas, e que o fluxo elétrico total que atravessa uma superfície fechada é igual à carga total envolvida (Lei de Gauss).

A segunda equação (equações 15.2 e 15.6) nos diz que o campo elétrico estacionário é conservativo.

A terceira equação (equações 15.3 e 15.7) nos diz que a corrente total que atravessa uma superfície aberta é igual à integração do vetor intensidade de campo magnético, ao longo do caminho que envolve essa superfície aberta. Quando essa superfície tende zero, essa circuitação do vetor intensidade de campo magnético nos dá a densidade e direção da corrente elétrica neste ponto. (Lei de Ampére).

A quarta equação (equações 15.4 e 15.8) informa que não existem pólos magnéticos isolados.

Deve-se salientar que as equações aqui apresentadas referem-se a campos eletrostáticos e magnetostáticos (não variantes com o tempo). As equações de Maxwell também podem ser formuladas matematicamente para englobar campos elétricos e magnéticos variantes no tempo. A esse assunto voltaremos mais tarde.

A estas equações devemos adicionar as expressões relacionando $\vec{D}$ e $\vec{E}$, e $\vec{B}$ e $\vec{H}$, no espaço livre:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad (C/m^2) \tag{15.9}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (Wb/m^2) \tag{15.10}$$

O conjunto formado pelas equações de Maxwell, mais essas duas últimas relações, constituem o cerne da teoria eletromagnética.

15.2 - POTENCIAL ESCALAR MAGNÉTICO

Uma das maneiras encontradas para resolver problemas de campo eletrostático foi a utilização do potencial escalar eletrostático V. Dada uma configuração de cargas, podemos encontrar o potencial eletrostático, e calculando o seu gradiente, a intensidade de campo elétrico. Devido à grande semelhança nas formulações da eletrostática e magnetostática, somos levados a perguntar se esta forma de solução não pode ser utilizada na magnetostática, ou seja, definir uma **função potencial escalar magnético**, a partir de uma distribuição de correntes, e a partir dela, determinar a intensidade de campo magnético. A resposta a esta questão é sim, sob certas circunstancias.

Vamos designar a função potencial escalar magnético V_m, e, em analogia com a eletrostática, definir:

$$\vec{H} = -\nabla V_m \quad (A/m) \tag{15.11}$$

O sinal negativo para o segundo membro da equação 15.11 deve-se estritamente à analogia com a eletrostática.

Escrevendo a Lei de Ampére na forma pontual, e substituindo o vetor intensidade de campo magnético pelo gradiente negativo da função escalar potencial magnético, teremos;

$$\nabla \times \vec{H} = \nabla \times \left(-\nabla V_m\right) = \vec{J} \tag{15.12}$$

Entretanto, o rotacional do gradiente de qualquer função escalar é identicamente nulo. Portanto, a função potencial escalar magnético só pode ser definida quando a densidade de corrente no ponto em que $\vec{H}$ está sendo calculado for zero. Ou:

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \tag{15.13}$$

Como muitos problemas magnéticos envolvem geometrias em que os condutores ocupam uma fração muito pequena do domínio, o potencial escalar magnético pode ser útil. O potencial escalar magnético também é aplicável a problemas envolvendo ímãs permanentes. Finalmente, como pode ser facilmente deduzível da equação 15.11, a unidade de V_m é o Ampére (A).

Uma diferença fundamental entre a função potencial escalar eletrostático e a função potencial escalar magnético, é que a primeira é um campo conservativo, ao passo que a segunda não o é. O potencial elétrico V é uma função unívoca, ou seja, uma vez que a referência zero seja fixada, existe um, e somente um valor de V associado a cada ponto do espaço. Este não é o caso de V_m. Para que V_m seja uma função unívoca, é necessário que não somente a densidade de corrente seja nula no ponto considerado, mas também que a corrente envolvida pela circuitação do vetor intensidade de campo magnético na região de interesse seja nula.

No eletromagnetismo moderno, onde o cálculo de campos eletromagnéticos é feito utilizando métodos numérico-computacionais, a utilização da função potencial escalar magnético é bastante limitada. Uma outra função, denominada **vetor potencial magnético** é mais utilizada, pois pode ser estendida a regiões com densidades de corrente diferentes de zero, e campos magnéticos variáveis no tempo.

O vetor potencial magnético (bem como a função potencial escalar magnético) não possui nenhum significado físico (pois, ao contrário da eletrostática, não existem cargas magnéticas isoladas). A sua definição provém de uma lei do cálculo vetorial, que afirma que o divergente do rotacional de qualquer função vetorial é nulo. Ora, como já sabemos:

$$\nabla.\vec{B} = 0 \tag{15.14}$$

Assim, deve existir uma função $\vec{A}$ tal que:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{15.15}$$

pois fica assegurado que:

$$\nabla.(\nabla \times \vec{A}) = 0 \tag{15.16}$$

A função $\vec{A}$ é conhecida como o vetor potencial magnético, e suas dimensões são (A/m).

Embora seja possível encontrar uma expressão matemática para o vetor potencial magnético, análoga à expressão para o potencial eletrostático, em termos de uma integral envolvendo corrente, (ou densidade de corrente), diferenciais de comprimento (ou de superfície, ou de volume) e distância dessas distribuições a pontos onde se deseja calcular o valor de $\vec{A}$, não o faremos aqui, pois essas expressões são de uso bastante limitado em casos práticos, pois a solução analítica das mesmas é bastante complexa, e, até mesmo impossível. Ao invés disso, partindo da definição do vetor potencial magnético e das leis já conhecidas do eletromagnetismo, vamos formular as equações de campo que servem como ponto de partida para o cálculo de campos elétricos e magnéticos por métodos numérico-computacionais.

15.3 - EQUAÇÃO DE POISSON E LAPLACE

15.3.1 - Magnetostática

Da lei de Ampére temos:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \tag{15.17}$$

ou :

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu} \right) = \vec{J} \tag{15.18}$$

portanto:

$$\nabla \times (\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}) = \vec{J} \tag{15.19}$$

Consideremos que o nosso problema tenha um comportamento bidimensional, ou seja, o potencial magnético só possui a componente na direção z, e só varia nas direções x e y. Isso pode ser melhor visualizado pela figura 15.1.

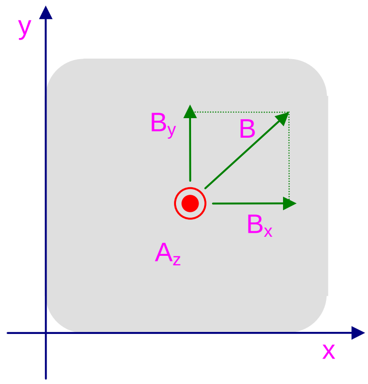

figura 15.1 - Campo magnético com comportamento bidimensional

Nesse caso, $A_x = A_y = 0$, $\partial A/\partial z = 0$.

Desenvolvendo os rotacionais da equação 15.19, chegaremos à expressão:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nu\partial A}{\partial y}\right)=-J \qquad (15.20)$$

onde ν é a relutividade do meio, definida como o inverso da permeabilidade. Se o meio não for linear, ### depende de B e vice-versa. A equação 15.20 é uma equação diferencial não linear, mais conhecida como **função Quase-Poisson** (ou **equação de Poisson não linear**). Se a relação entre B e H for linear, ### pode ser isolado na equação 15.20 recaindo na **equação de Poisson**.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nu\partial A}{\partial y}\right)=-J/\nu \qquad (15.21)$$

Se o meio for desprovido de correntes, a equação 15.21 se reduzirá à equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=0 \qquad (15.22)$$

A solução da equação 15.20 (que naturalmente engloba as equações 15.21 e 15.22) permite o conhecimento do campo magnético em qualquer ponto de um circuito magnético. Entretanto esta equação não possui uma solução analítica conhecida. Por essa razão, a única maneira de fazê-lo é através do métodos numéricos.

15.3.2 - Eletrostática

A obtenção da Equação de Poisson para a eletrostática é extremamente simples. A partir da forma pontual da lei de Gauss:

$$\nabla.\vec{D}=\rho \qquad (15.23)$$

Da definição de $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad (15.24$$

E da expressão de $\vec{E}$ em gradiente:

$$\vec{E} = -\nabla V \qquad (15.25$$

Substituindo 15.25 e 15.24 em 15.23:

$$-\nabla.(\varepsilon\nabla V) = \rho \qquad (15.26)$$

ou:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (15.27)$$

Essa é a equação de Poisson para a eletrostática, que é válida para uma região onde ε é constante. Expandindo-a em coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (15.28)$$

Se ρ for igual a zero, a equação 15.28 recairá na equação de Laplace:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (15.29)$$