16 SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE LAPLACE

Todos os dispositivos elétricos funcionam baseados na ação de campos elétricos, produzidos por cargas elétricas, e campos magnéticos, produzidos por correntes elétricas. Por sua vez, correntes elétricas se constituem de cargas elétricas em movimento. Para entender o funcionamento de dispositivos elétricos, devemos ser aptos para avaliar estes campos nestes dispositivos, e em torno deles. Isso é possível se dominarmos técnicas que nos permitam uma visualização espacial dos fenômenos. Em outras palavras, devemos ser capazes de produzir mapas de campos que descrevam o comportamento dos fenômenos elétricos. Estes mapas normalmente representam linhas de fluxo, superfícies equipotenciais e distribuições de densidades. Estes mapas nos dão informações a respeito de intensidade de campo, diferença de potencial, energia armazenada, cargas, densidades de correntes etc.

A obtenção de mapas de campos é possível resolvendo-se as equações de campo já apresentadas na seção anterior. Entretanto, essas equações diferenciais possuem solução bastante complexas, e na grande maioria dos casos práticos só possuem uma solução numérica. Dedicaremos essa seção à solução da equação de Laplace, para a eletrostática, em configurações simples. O assunto é bastante complexo, e não pode ser esgotado no âmbito de um curso de graduação.

16.1 - SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE LAPLACE

Vamos escrever a equação de Laplace ($\nabla^2 V = 0$) em coordenadas retangulares, para o caso bidimensional:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad (16.1)$$

Esta é uma equação diferencial a derivadas parciais de segunda ordem (possui derivadas de segunda ordem) e primeiro grau (não possui potências além da primeira). a Equação 16.1 é a maneira mais geral de se expressar a variação do potencial eletrostático V em relação à posição (x,y,z), não sendo específica a nenhum problema em particular. Em outras palavras, para se resolver um problema em eletrostática utilizando esta equação, deve-se conhecer as condições de contorno do problema.

Vamos resolver a equação (16.1) utilizando o método da separação de variáveis, onde assumimos que V pode ser expresso como o produto de duas funções X e Y . Ou:

$$V = XY \qquad (16.2)$$

onde:

X é função de x, apenas,
Y é função de y apenas,

Substituindo 16.2 em 16.1, nós temos:

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \qquad (16.3)$$

Dividindo 16.3 por XY, teremos:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2V}{dy^2}=0 \tag{16.4}$$

Desde que a soma dos três termos é uma constante, e cada variável é independente, cada termo deve ser igual a uma constante. Então, podemos escrever:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2V}{dx^2}=a_1^2 \tag{16.5}$$

ou:

$$\frac{d^2V}{dx^2}=a_1^2X \tag{16.6}$$

e, similarmente:

$$\frac{d^2V}{dy^2}=-a_1^2Y \tag{16.7}$$

$$\frac{d^2V}{dz^2}=-a_1^2Z \tag{16.8}$$

O problema agora consiste em achar a solução para cada variável separadamente (daí o nome "separação de variáveis").

A solução para a equação 16.6 é:

$$X = C_1e^{a_1x} + C_2e^{-a_1x} \tag{16.9}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, que devem ser calculadas a partir das condições de contorno.

De maneira semelhante :

$$X=C_3e^{a_1jy}+C_4e^{-a_1jy} \tag{16.10}$$

Qualquer termo em 16.10 é uma solução, e a soma também é uma solução. Para verificar isso, basta substituir 16.10 em 16.6.

A solução geral da equação 16.1 é:

$$V=(C_1e^{a_1x}+C_2e^{-a_1x})(C_3e^{a1jy}+C_4e^{-a1jy}) \tag{16.11}$$

onde C_1, C_2, C_3, e C_4 são constantes a determinar, a partir das condições de contorno do problema. As soluções também podem ser escritas nas formas de funções trigonométricas e hiperbólicas.

Exemplo 16.1

Considere um capacitor de placas paralelas, de área 100 cm^2 e distância entre as placas 0.01 m. a placa inferior está no potencial zero, e a placa superior no potencial 100 V. Utilizando a equação de Laplace, determine a distribuição de potencial entre as placas (desprezar o espraiamento).

solução

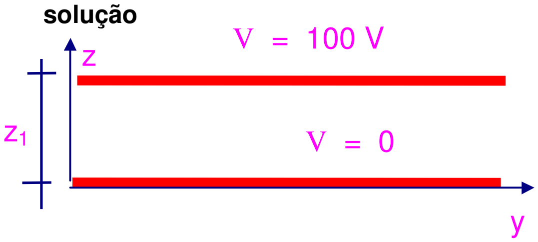


figura 16.1 - Capacitor de placas paralelas

Não há variação do potencial nas direções y e x, mas apenas na direção z. Portanto a equação de Laplace se reduz a:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

Para a segunda derivada de V em relação a z ser zero, a primeira derivada deve ser igual a uma constante:

$$\frac{dV}{dz} = C_1$$

ou:

$$dV = C_1 dz$$

integrando:

.

$$\int dV = \int C_1 dz$$

ou:

$$V = C_1 z + C_2$$

Utilizando agora as condições de contorno, vamos determinar as constantes C_1 e C_2.

Em z = 0, temos V = 0. Portanto:

$$0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

Em z = 0.01 m, temos V = 100 V. Portanto:

$$100 = C_1 0.01 \Rightarrow C_1 = 10000$$

Introduzindo os valores de C_1 e C_2 na equação da solução:

$$V = 10^4 z \quad (V)$$

O campo elétrico entre as placas ($\vec{E} = -\nabla V$) será:

$$\vec{E} = 10^4 \hat{a}_z$$

Portanto, constante, e igual à relação V/d, como era de se esperar

16.2 - SOLUÇÃO REPETITIVA DA EQUAÇÃO DE LAPLACE

Na seção anterior apresentamos uma solução exata para a equação de Laplace em um capacitor de placas paralelas. Trata-se, entretanto, de um problema extremamente simples. Configurações mais complexas torna a solução analítica extremamente difícil, e, em muitos casos, impossível. Nesta seção vamos apresentar um método de solução numérica da equação de Laplace (método bastante primitivo, diga-se de passagem), denominado de solução repetitiva.

Para simplificar a variação na direção z não existe. Isso reduz o nosso problema a um problema de campo bidimensional:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad (16.12)$$

O primeiro termo na equação 16.2 é a derivada parcial segunda de V em relação a x, isto é, a taxa de variação em relação a x da taxa de variação de V em relação a x. Idem para o 2º termo, em relação a y. Vamos reescrever a equação 16.12 da seguinte maneira:

$$\frac{\partial\left(\partial V/\partial x\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\partial V/\partial y\right)}{\partial y} \qquad (16.13)$$

Considere agora uma distribuição bidimensional de potenciais em torno de um ponto P, como é mostrado na figura 16.2. Seja o potencial no ponto P igual a V_0, e os potenciais nos quatro pontos em torno dele iguais a V_1, V_2 V_3 e V_4, conforme é mostrado. Vamos agora substituir as derivadas na equação 16.13 por diferenças do tipo $(V_0 - V_1)/\Delta x$ (neste caso específico, esta é a inclinação da curva de V entre os pontos P e 1). A diferença das inclinações, dividida pela distância incremental Δx é aproximadamente igual a $\partial^2 V/\partial x^2$. A equação de Laplace pode agora ser reescrita como:

$$\frac{\left[(V_2 - V_0)/\Delta x\right] - \left[(V_0 - V_1)/\Delta x\right]}{\Delta x} \cong -\frac{\left[(V_3 - V_0)/\Delta y\right] - \left[(V_0 - V_4)/\Delta y\right]}{\Delta y} \qquad (16.14)$$

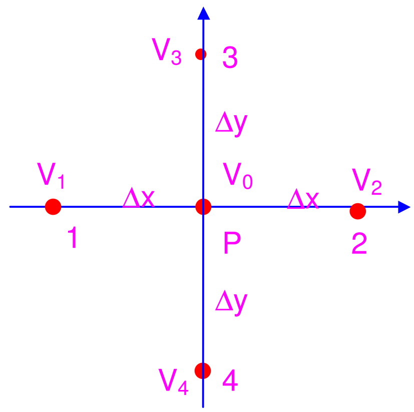


figura 16.2 - Construção para encontrar o potencial em P.

Fazendo $\Delta x = \Delta y$, teremos:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0 \approx 0 \qquad (16.15)$$

ou:

$$V_0 \approx \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) \qquad (16.16)$$

Se conhecermos o potencial nos pontos 1, 2, 3 e 4, podemos calcular o potencial no ponto P de acordo com a equação 16.16. Em outras palavras, o significado físico da equação de Laplace é que o potencial em um ponto é simplesmente a média dos potenciais dos quatro pontos que o circundam, a uma mesma distância.

Exemplo 16.2

Considere a configuração Mostrada na figura 16.3. A placa superior está a um potencial de 40 V, e isolada. O perfil em forma de U está no potencial zero. Calcular a distribuição de potenciais para esta configuração, utilizando o método de solução repetitiva da equação de Laplace.

solução

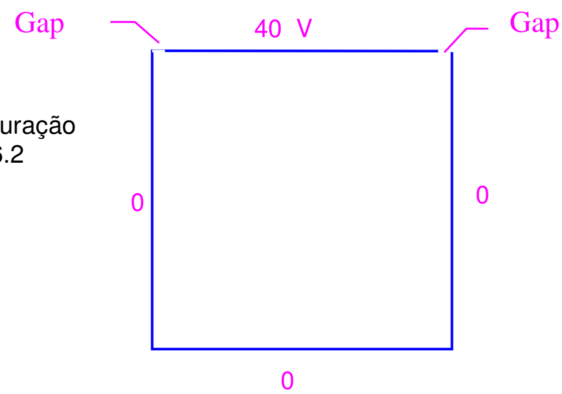


figura 16.3 - Configuração do exemplo 16.2

O valor de V no centro do quadrado será

$$\frac{40 + 0 + 0 + 0}{4} = 10 \quad (V)$$

O potencial no centro do gap será a média aritmética entre o potencial no placa superior e o potencial nulo:

$$\frac{40 + 0}{2} = 20 \text{ V}$$

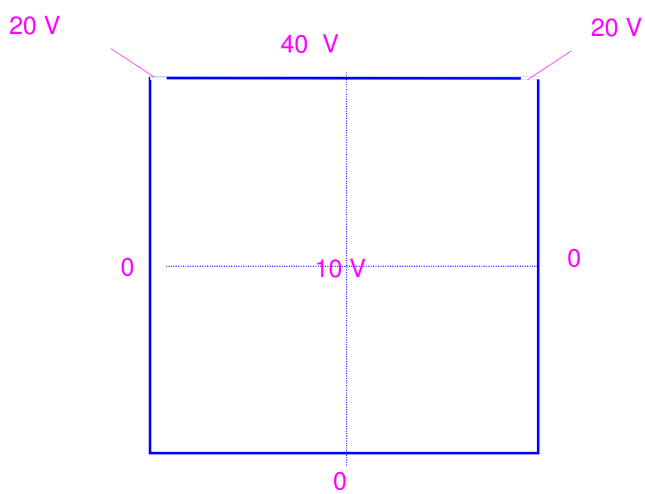


figura 16.4 - 1º cálculo do potencial

O valor do potencial no centro dos novos quadrados será:

$$\frac{40 + 20 + 10 + 0}{4} = 17.5 \quad (V)$$

$$\frac{0 + 0 + 10 + 0}{4} = 2..5 \quad (V)$$

Calculando novamente os potenciais nos quadrados internos teremos:

$$\frac{10 + 17.5 + 2.5 + 0}{4} = 7.5 \text{ V} \quad ,$$

$$\frac{40 + 17.5 + 17.5 + 10}{4} = 21.25 \text{ V}$$

$$\frac{2.5 + 2.5 + 0 + 10}{4} = 3.75 \text{ V}$$

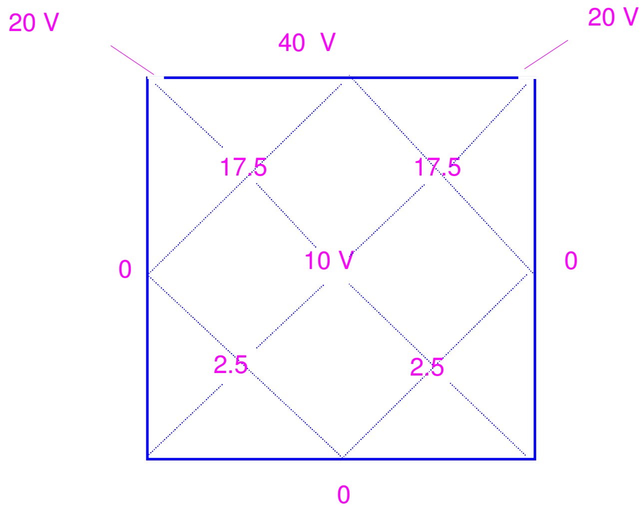


figura 16.5 - 2º cálculo do potencial

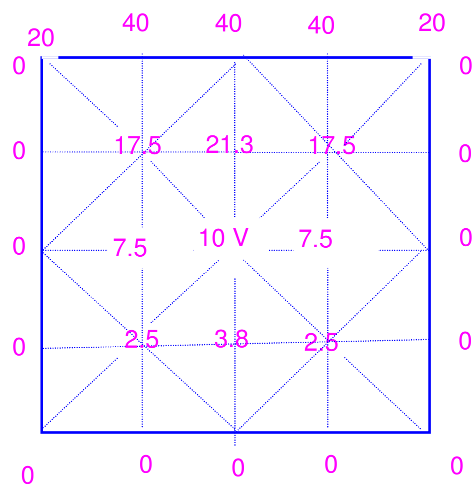


figura 16.6 - 3º cálculo do potencial

Os cálculos de potenciais podem prosseguir indefinidamente. quanto maior for o número de potenciais calculados por esse processo, maior será a precisão. Finalmente, a figura 16.8 apresenta um gráfico com o mapeamento dos potenciais eletrostáticos. Cada linha representa um valor de potencial (30, 20, 15, 10, 5 e 2.5 V)

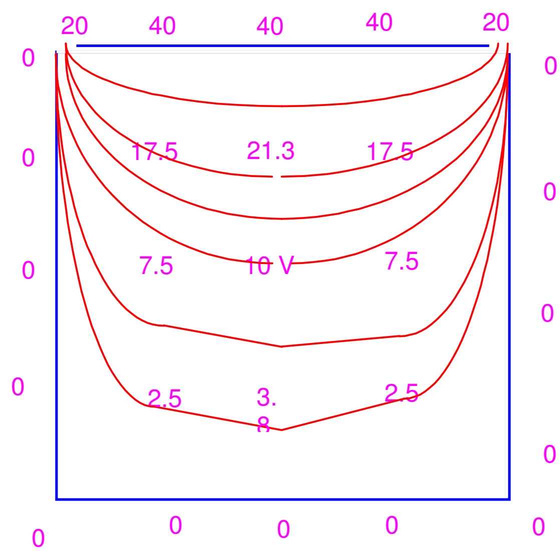


figura 16.8 - Mapeamento dos potenciais eletrostáticos

Apresentamos neste capítulo dois exemplos, um com a solução analítica da equação de Laplace, outro com uma solução numérica. A solução analítica das equações de Laplace e Poisson se restringem a casos onde a geometria é bastante simples, e por isso ela não é muito utilizada. A solução numérica dessas equações é bastante comum, e métodos bastantes avançados já foram desenvolvidos. Apesar de termos realizados exemplos de eletrostática, o mesmo procedimento é realizado no caso de campos magnéticos, onde as complexidades de geometria e meios magnéticos não lineares são ainda maior.

EXERCÍCIOS

1) - Quatro placas de 20 cm de largura formam um quadrado, conforme indicado na figura 3. se as placas são isoladas entre si, e estão submetidas aos potenciais indicados, encontre o valor do potencial nos pontos a e b, indicados na figura.

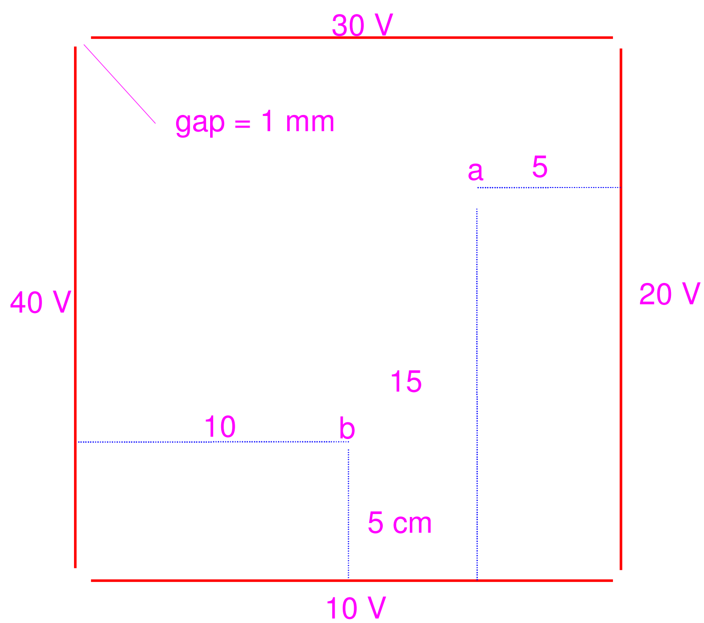
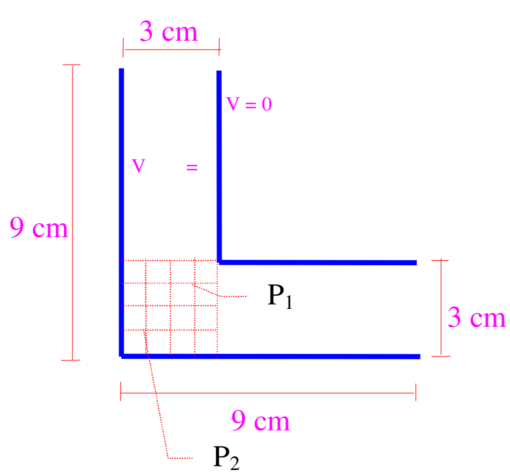


figura 1 - figura do problema 1

2) - Encontre o valor do potencial V nos pontos P_1 e P_2 da configuração abaixo.



3) - Um potencial em coordenadas cilíndricas é função apenas de r e ϕ, não o sendo de z. obtenha as equações diferenciais separadas para R e Φ, onde $V = R(r)\Phi(\phi)$, e resolva-as. A região é sem cargas.