23 CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS VARIÁVEIS NO TEMPO

Neste capítulo estudaremos a **lei da indução eletromagnética de Faraday**. Ela é uma das primeiras leis do eletromagnetismo, e o efeito que ela descreve é de fundamental importância. Máquinas Elétricas e Transformadores, por exemplo, tem o seu funcionamento baseado inteiramente no princípio da indução eletromagnética. A ela devemos toda energia elétrica que consumimos em nossas residências, instalações industriais e comerciais, pois o funcionamento dos geradores síncronos nas usinas geradoras de energia elétrica funcionam baseados nesse princípio. Também devemos a esse fenômeno a nossa capacidade de nos comunicarmos com todo o mundo, a até com outros planetas, pois as ondas eletromagnéticas geradas nas estações ou equipamentos transmissores viajam pelo espaço, e são captadas por equipamentos receptores, onde tensões variáveis serão induzidas em seus circuitos, para posterior decodificação.

23.1 – Indução Eletromagnética

Considere a espira circular da figura 23.1a, com um ímã permanente movendo-se no sentido de penetrar na espira. Portanto o fluxo magnético que atravessa a espira estará aumentando. Isto resultará em uma corrente induzida na espira, numa direção tal que o fluxo magnético por ela gerado se oporá à variação do fluxo produzido pelo ímã permanente. Na figura 23.1b o ímã está se afastando da espira, portanto o fluxo que atravessa a espira estará diminuindo. Novamente ter-se-á uma indução de corrente na espira, produzindo um fluxo que se oporá à variação do fluxo produzido pelo ímã. Assim, a direção da corrente na figura 23.1b será na direção contrária à corrente da figura 23.1a. Movendo-se o ímã para cima e para baixo, alternadamente, uma corrente alternada (CA) fluirá na espira. Este arranjo constitui portanto um gerador simples de corrente alternada. O fato da corrente induzida na espira estar sempre em oposição à variação do fluxo produzido pelo ímã permanente, é explicado pela lei de **Lenz**.

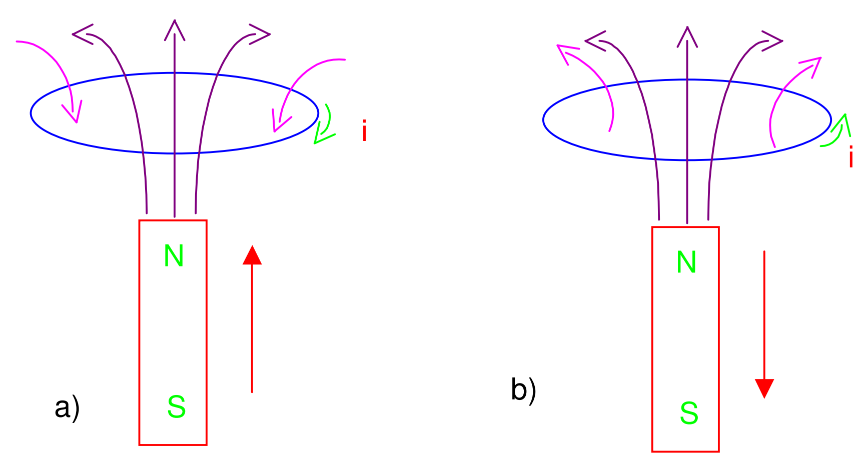

figura 23.1 - Variação do fluxo magnético através de uma espira, pelo movimento de um ímã permanente.

Suponha agora que a espira é seccionada em um ponto qualquer, como na figura 23.2. O movimento alternado do ímã fará com que uma força eletromotriz apareça entre os seus terminais. Essa força eletromotriz será igual à taxa de variação do fluxo concatenado com a espira em relação ao tempo :

$$e = -\frac{d\varphi_m}{dt} \tag{23.1}$$

onde:
e = força eletromotriz induzida, em Volts
φ_m = fluxo magnético, em Weber
t = tempo, em segundos.

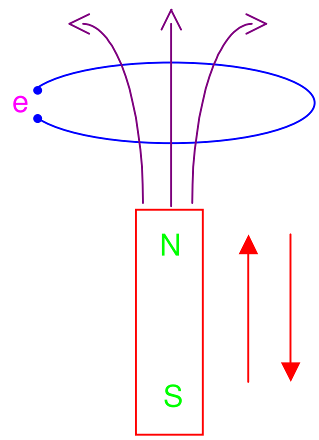

figura 23.2 - Espira em circuito aberto

A equação 23.1 é uma maneira de apresentar a lei de Faraday, e expressa a força eletromotriz induzida em um circuito devido à variação do fluxo concatenado com este circuito. Esta variação de fluxo concatenado pode ocorrer através de:

- variação no tempo da amplitude do fluxo magnético
- movimento relativo entre um campo magnético e o circuito
- combinação de ambos.

23.2 - Tensão Induzida por Efeito Variacional

A força eletromotriz em um circuito é igual à integral do vetor intensidade de campo vlétrico associado com a corrente induzida, ao longo do comprimento da espira, considerando a separação entre os terminais como sendo desprezível:

$$e = \oint_l \vec{E}.d\vec{l} \tag{23.2}$$

O fluxo concatenado com a espira é igual à integral da componente normal do vetor indução magnética sobre a superfície envolvida pelo espira:

$$\varphi_m = \int_s \vec{B}.d\vec{S} \tag{23.3}$$

onde:

$\vec{B}$ = vetor indução magnética, em Weber/m^2.
$d\vec{S}$ = elemento diferencial de área, em m^2

Substituindo a equação (23.3) em (23.1), ter-se-á:

$$e = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}.d\vec{S} \tag{23.4}$$

e se a espira, ou circuito fechado, for estacionário, ou manter a sua forma fixa:

$$e = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{S} \tag{23.5}$$

Esta forma da lei de Faraday expressa a força eletromotriz induzida devido especificamente à variação do vetor densidade de fluxo em relação ao tempo, para uma espira, ou circuito fechado que é estacionário em relação ao observador. Ela também é chamada de *tensão de transformador*. Combinando as equações (23.5) e (23.2):

$$\oint_l \vec{E}.d\vec{L} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{S} \tag{23.6}$$

Esta é uma das equações de Maxwell, derivada da lei de Faraday (já a conhecemos para campos magnetostáticos, $\oint_l \vec{E}.d\vec{L} = 0$). mais adiante veremos que ela também pode ser expressa na forma diferencial.

Exemplo 23.1

Calcular a força eletromotriz induzida na espira retangular da figura 23.3, sabendo que ela está na presença de um campo magnético variável, criado por uma corrente que flui em um fio de comprimento infinito.

Solução

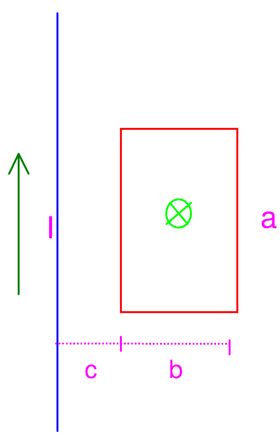

figura 23.3 – espira retangular na presença de um campo magnético variável

$$e = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{S}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$i = I_m \text{ sen } \omega t$$

$$e = -\int_0^a \int_c^{c+b} \frac{\mu_0 I_m \text{ sen } \omega t}{2\pi r} drdx$$

$$e = -\frac{\mu_0 I_m \omega \cos \omega t}{2\pi} \int_0^a \int_c^{c+b} \frac{drdx}{r}$$

$$e = \frac{\mu_0 I_m \omega a \cos \omega t}{2\pi} \ln\left(\frac{c+b}{c}\right) V$$

23.3 - Tensão Induzida Devido ao Efeito Mocional

Pela equação (23.1), a força eletromotriz induzida em um circuito elétrico fechado é a taxa da variação do fluxo magnético que o atravessa em relação ao tempo. Imagine uma situação onde o campo magnético é constante, e o circuito elétrico, de alguma maneira tem a sua forma alterada (genericamente, ilustrado na figura 23.4).

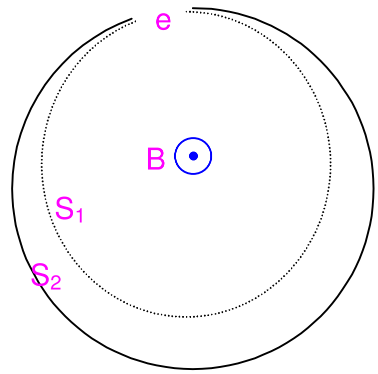

Figura 23.4 – Circuito elétrico se alterando, na presença de um campo magnético constante

A força eletromotriz induzida na espira será:

$$|e| = \frac{d\phi}{dt}$$

$$|e| = \frac{d(BS)}{dt}$$

$$|e| = B\frac{dS}{dt}$$

Portanto, a força eletromotriz é proporcional à taxa de variação da àrea em relação ao tempo. Para encontrar um expressão para a força eletromotriz em termos vetoriais, Suponha, por exemplo, o arranjo mostrado na figura 23.5.

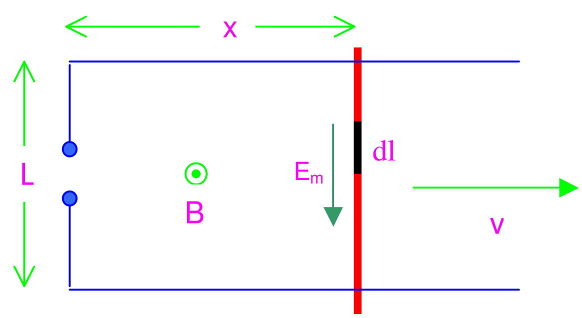

Figura 23.5 – Condutor, deslizando sobre condutores fixos.

Sabemos que a força sobre um condutor percorrido por uma corrente I, e imerso em um campo magnético B é dada por:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \quad N \tag{23.7}$$

mas:

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{23.8}$$

então:

$$Idl = \frac{dQ}{dt}dl = dQ\vec{v} \tag{23.9}$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade. Assim:

$$d\vec{F}=dQ(\vec{v}\times\vec{B}) \tag{23.10}$$

Que é a força de Lorentz. Dividindo por dQ:

$$\frac{d\vec{F}}{dQ} = \vec{v}\times\vec{B} = \vec{E}_m \tag{23.11}$$

$\vec{E}_m$ é o campo elétrico gerado em um condutor que se movimenta em relação a um campo magnético. Esse campo elétrico dará origem a uma força eletromotriz no condutor, expressa por:

$$e = \oint_l \vec{E}_m.d\vec{L} = \oint_l (\vec{v}\times\vec{B}).d\vec{L} \tag{23.12}$$

Exemplo 23.2

Calcular a força eletromotriz induzida entre os pontos a e b da figura 23.4. O condutor desenhado em vermelho desliza sobre os dois condutores desenhados em azul, na presença de um campo magnético invariante no tempo.

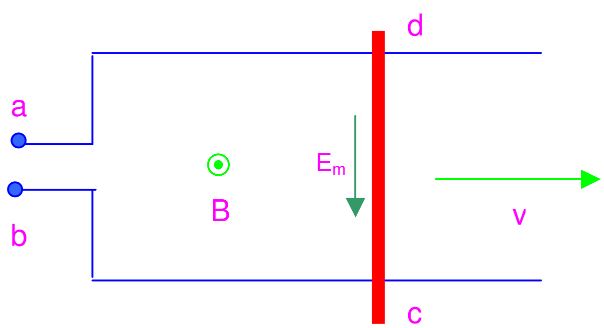

figura 23.4

Solução

$$e=\oint_l(\vec{v}\times\vec{B})d\vec{L}$$

O vetor intensidade de campo elétrico, resultante do produto vetorial entre a velocidade do condutor e o vetor indução magnética será perpendicular , tanto ao vetor velocidade, como ao vetor indução magnética. Portanto, o vetor intensidade de campo elétrico resultará na direção de d para c

$$e = vBL \quad V$$

23.4 - Caso Geral de Indução

Trata-se da combinação dos dois casos, ou seja, movimento do condutor em relação ao campo magnético, e este variando em relação ao tempo. Portanto:

$$e = \oint_l \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{L} + \left(-\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}.d\vec{S}\right) \quad V \tag{23.13}$$

Exemplo 23.3

Resolver o exemplo anterior, porém, com $B = B_0 \cos\omega t$.

Solução

$$e = vBL\cos\omega t - \frac{\partial}{\partial t}\int_S B_0 \cos\omega t dS$$

$$e = vB_0 L\cos\omega t + \omega B_0 x L \operatorname{sen}\omega t$$

$$e = B_0 L\left(v\cos\omega t + wx\operatorname{sen}\omega t\right)$$

dividindo todos os termos por $\sqrt{v^2 + (\omega x)^2}$:

$$\frac{e}{\sqrt{v^2 + (\omega x)^2}} = B_0 L\left(\frac{v}{\sqrt{v^2 + (\omega x)^2}}\cos\omega t + \frac{\omega x}{\sqrt{v^2 + (\omega x)^2}}\operatorname{sen}\omega t\right)$$

fazendo:

$$\operatorname{sen}\delta = \left(\frac{v}{\sqrt{v^2 + (\omega x)^2}}\right)$$

$$\cos\delta = \left(\frac{\omega x}{\sqrt{v^2 + (\omega x)^2}}\right)$$

fica:

$$\frac{e}{\sqrt{v^2 + (\omega x)^2}} = B_0 L\left(\operatorname{sen}\delta\cos\omega t + \cos\delta\operatorname{sen}\omega t\right)$$

$$e = B_0 L\sqrt{v^2 + (\omega x)^2}\operatorname{sen}(\omega t + \delta) \text{ V}$$

23.5 – Lei da Indução Eletromagnética de Faraday na Forma Diferencial

Aplicando à integral de linha da equação:

$$e = \oint_l \vec{E}.d\vec{L} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.d\vec{S} \tag{23.14}$$

o teorema de Stokes, ela será transformada numa integral de superfície do rotacional do vetor intensidade de campo elétrico $\vec{E}$. Assim:

$$\oint_l \vec{E}.d\vec{L} = \int_s \left(\nabla \times \vec{E}\right) d\vec{S} \tag{23.15}$$

Como as duas integrais de superfície são calculadas sobre a mesma superfície, podemos igualar os integrandos:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{23.15}$$

Esta é a equação de Maxwell derivada da equação da indução eletromagnética de Faraday, na forma diferencial.

Exemplo 23.6

Suponha uma densidade de fluxo magnético $B = B_0 \,\text{sen}\, \omega t.\hat{a}_z$. Uma espira de raio r é colocada na presença deste campo magnético, no plano z = 0. Determinar a expressão para o vetor intensidade de campo elétrico, utilizando a formulação da lei da Faraday na forma integral e na forma diferencial.

Solução

Utilizando a forma integral, podemos escrever:

$$\oint_l \vec{E}.d\vec{L} = \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{S}$$

A indução magnética é uniforme em relação ao plano z, e, portanto, o vetor intensidade de campo elétrico deverá ter uma simetria circular ao longo do percurso escolhido. Assim, teremos

$$E.2\pi r = -B_0 \omega \cos \omega t.\pi r^2$$

ou:

$$\vec{E} = -\frac{B_0 \omega r}{2} \cos \omega t.\hat{a}_\phi$$

Utilizando agora a forma diferencial teremos:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -B_0 \omega \cos \omega t.\hat{a}_z$$

Por outro lado, o vetor intensidade de campo elétrico só possui a componente em ϕ, e só varia na direção radial. Portanto:

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\phi)}{\partial r}.\hat{a}_z$$

Portanto:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\phi)}{\partial r} = -B_0 \omega \cos \omega t$$

Multiplicando ambos os membros por r, separando as variáveis, e integrando:

$$\int \partial (rE_\phi) = -\int rB_0 \omega \cos \omega t dr$$

$$rE_\phi = -B_0 \omega \cos \alpha \omega t \frac{r^2}{2}$$

ou:

$$\vec{E} = -\frac{B_0 \varpi r}{2} \cos \omega t.\hat{a}_\phi$$

como esperávamos.

EXERCÍCIOS

1)- Uma bobina estacionária, quadrada, de oito espiras, tem vértices em (0,0,0), (2,0,0), (0,2,0), (2,2,0). Se um campo magnético normal à espira varia em função da posição, dado por $B = 12sen(\pi x/2).sen(\pi y/2)$, encontre a força eletromotriz induzida na espira, se B também varia harmonicamente no tempo em 800 Hz.

2)- Um pêndulo de chumbo está se movimentando com a sua extremidade descrevendo um circulo de 150 mm de raio sobre uma película de mercúrio, no sentido anti-horário, com uma ponta em contato com o liquido (conforme a figura 23.4). A o comprimento da parte do fio que está se movimentando é m, e o tempo de uma revolução é 6 s. O gancho que suporta o pêndulo também suporta um fio estático vertical, ao longo do eixo do cone descrito pelo pêndulo. O fio faz contato com o mercúrio no centro do circulo, completando assim o circuito elétrico. Se existe um campo magnético horizontal de 60 μT, encontre a f.e.m induzida no circuito.

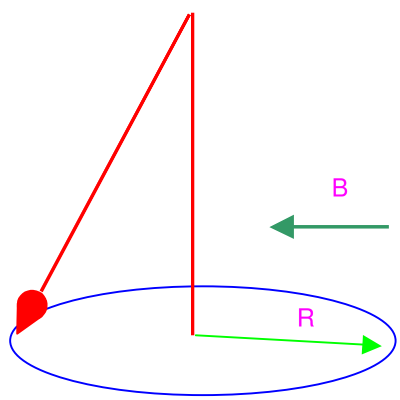

Figura 23.4 – figura do problema 2

3)-Um fio condutor oscila como um pêndulo, na presença de um campo magnético uniforme, conforme a figura 23.5. A velocidade de um ponto sobre o fio, distante r m do ponto P é dada por $v = \omega \times d(r/R)\cos(\omega t)$, onde d é o deslocamento máximo horizontal, ou meia amplitude. Se o comprimento R do pêndulo é 3 m, e seu período T é dado por $T = 2\pi\sqrt{R/9.8}$ s, e d = 150 mm, determine a f.e.m induzida no circuito.

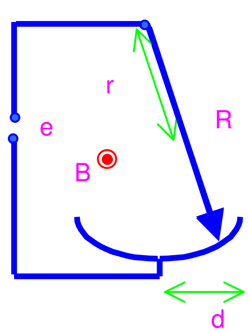

Figura 23.5 – figura do problema 3

4)- Um campo Magnético uniforma B = 200 mT estende-se sobre uma área de100 mm de lado, como na figura 23.5. O campo magnético fora desta área é nulo. uma espira retangular de 40 mm por 80 mm move-se através do campo com uma velocidade uniforme V.

a) -Se uma tensão de 2 V é induzida na espira, encontre a velocidade V.

b) - Os valores de x para os quais haverá tensão induzida.

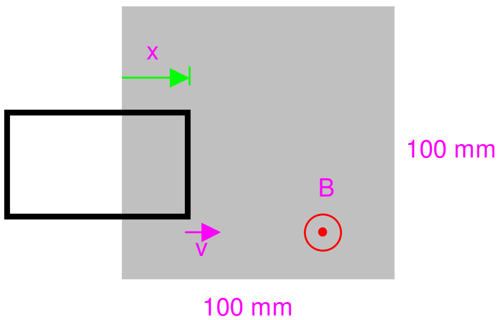

Figura 23.5 – figura do problema 4

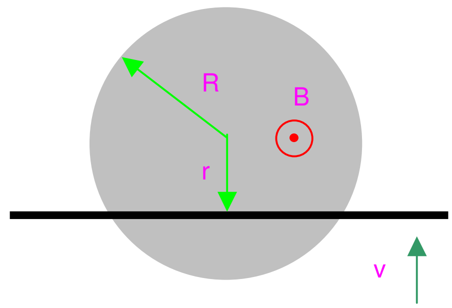

Figura 23.6 – figura do problema 5

5)- Encontre a máxima taxa de variação da f.e.m induzida em um condutor retilíneo que se move com velocidade v, perpendicularmente a um campo magnético uniforme B, produzido pelas faces circulares de um eletromagneto, como na figura 6. O campo magnético é confinado ao raio R. Em qual valor de r deve a máxima f.e.m ocorrer?

6) - Uma espira condutora é "pintada" em tomo do equador de um balão esférico de borracha. Um campo magnético B = 0.2cos4t T é aplicado perpendicularmente ao plano do equador. O balão está se contraindo com um velocidade radial v. quando o raio do balão é 0.5 m, o valor eficaz da tensão induzida é 5 V. Encontre a velocidade v neste instante.