24

CORRENTE DE CONDUÇÃO, CORRENTE DE DESLOCAMENTO, EQUAÇÕES DE MAXWELL

24.1 - Corrente de Condução e Corrente de Deslocamento

Neste capítulo introduziremos um novo conceito, que é a corrente de deslocamento. Suponha que o capacitor da figura 24.1 seja submetido a uma diferença de potencial v(t). Sabemos que uma corrente elétrica i(t) vai se estabelecer neste circuito.

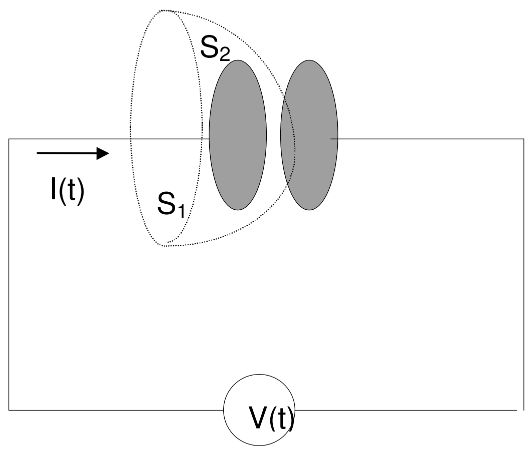

Figura 24.1 – Capacitor submetido a uma diferença de potencial v(t), percorrido por uma corrente i(t)

Suponha agora que duas superfícies, S_1 e S_2, sejam delimitadas pelo mesmo caminho fechado l. Aplicando a lei de Ampére para as duas superfícies teríamos.

$$\oint \vec{H}.d\vec{l} = i(t)$$, para S_1 e

$$\oint \vec{H}.d\vec{l} = 0$$, para S_2

Obviamente isto é um absurdo, pois contraria o princípio da continuidade da corrente. É claro que existe uma "corrente" entre as placas do capacitor paralelo, mesmo sem a presença de um condutor entre elas. A esta corrente chamaremos de "corrente de deslocamento". Neste exemplo , a "corrente de deslocamento" deve se igualar em módulo à corrente de condução, que existe no condutor externo ao capacitor. Entretanto, essas duas correntes são de natureza distintas. A corrente de condução é o resultado do movimento de elétrons entre um átomo e outro do material condutor, e pode existir em qualquer situação (corrente constante ou variável). A corrente de deslocamento é resultado da polarização de cargas entre as placas do capacitor, e só existe quando a tensão entre as placas varia com o tempo. Quando a tensão aplicada for constante, ela existirá apenas em um instante transitório, desaparecendo em seguida (No exemplo em questão o mesmo deverá ocorrer com a corrente de condução, para satisfazer o princípio da continuidade da corrente).

Seja agora um capacitor e um resistor ligados em paralelos, submetidos a uma tensão V, conforme a figura 24.2. No capacitor haverá corrente de deslocamento, e no resistor corrente de condução.

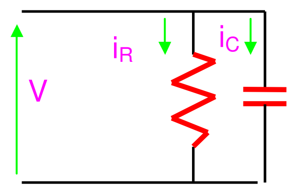

figura 24.2 – Resistor e capacitor submetidos a tensão V

Da teoria de circuitos, sabemos que:

$$i_R = \frac{V}{R} \tag{24.1}$$

e

$$i_C = C\frac{dV}{dt} \tag{24.2}$$

onde i_R é a corrente de condução no resistor, e i_C a corrente de deslocamento no capacitor.

Vamos agora escrever essas relações baseadas em relações de campo, representando os elementos resistor e capacitor conforme a figura 24.3.

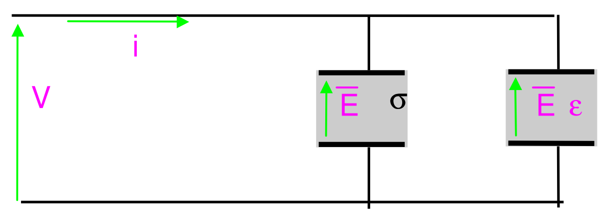

Figura 24.3 – representação do capacitor e do resistor, baseada em grandezas de campo

A intensidade de campo elétrico é a mesma, tanto no resistor como no capacitor, e pode ser expressa como:

$$E = \frac{V}{d} \tag{24.3}$$

Para o resistor podemos escrever:

$$i_R = \frac{V}{R} = E \times d \Big/ \frac{1}{\sigma}\frac{d}{A} \tag{24.4}$$

$$\frac{i_R}{A} = J_R = \sigma E \tag{24.5}$$

ou:

$$\vec{J}_R = \sigma \vec{E} \tag{24.6}$$

Para o capacitor podemos escrever:

$$i_C = C\frac{dV}{dt} \qquad (24.7)$$

$$C = \varepsilon\frac{A}{d} \qquad (24.8)$$

$$V = Ed \qquad (24.9)$$

$$i_C = \varepsilon\frac{A}{d}d\frac{dE}{dt} \qquad (24.10)$$

$$\frac{i_C}{A} = J_c = \varepsilon\frac{dE}{dt} = \frac{dD}{dt} \qquad (24.11)$$

ou:

$$\vec{J}_C = \frac{d\vec{D}}{dt} \qquad (24.12)$$

$\vec{J}_C$, a densidade de corrente no capacitor representa uma corrente de deslocamento, que passará a ser representada por $\vec{J}_d$, e $\vec{J}_R$, a densidade de corrente no resistor representa uma corrente de condução, que passará a ser representada por $\vec{J}$.

Suponha agora um meio com as duas características, ao invés de uma resistência pura, em paralelo com uma capacitância pura (pode ser um mau condutor, ou um dielétrico com perdas). A generalização da lei de Ampére para esse meio permite escrever:

$$\oint \vec{H}.d\vec{L} = \int\left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{S} \qquad (24.13)$$

Aplicando o teorema de Stokes ao primeiro membro da equação acima, temos:

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad (24.14)$$

ou:

$$\nabla\times\vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (24.15)$$

O conceito de corrente de deslocamento foi introduzido por **J. C. Maxwell**, para se levar em conta a possibilidade de propagação de ondas eletromagnéticas no espaço.
Se o campo elétrico varia harmonicamente com o tempo, as correntes de deslocamento e condução estão defasadas de 90 graus.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \operatorname{sen}\omega t \qquad (24.15)$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}_0 \operatorname{sen}\omega t \qquad (24.16)$$

$$\vec{J}_d = \varepsilon\omega\vec{E}_0 \cos\omega t \qquad (24.17)$$

Exemplo 24.1

Um material com σ = 5,0 S/m e ε_r = 1,0 é submetido a uma intensidade de campo elétrico de 250sen10^{10}t V/m. Calcular as densidades de corrente de condução e de deslocamento. Em que frequência elas terão a mesma amplitude máxima ?

Solução

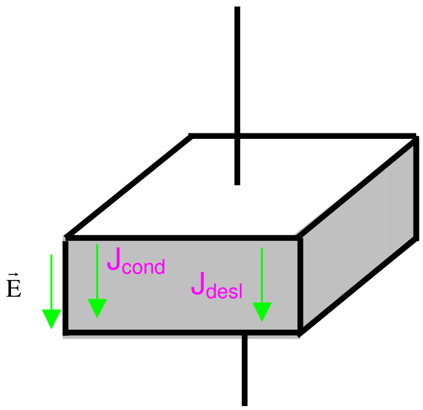

Figura 24.4 – dielétrico com perdas

$$J_{cond} = = \sigma E = 5 \times 250\,\mathrm{sen}\,10^{10} t$$

$$J_{cond} = 1250\,\mathrm{sen}\,10^{10} t \ \ (A/m^2)$$

$$J_{desl} = \varepsilon \frac{dE}{dt} = 8.85 \times 10^{-12} \times 10^{10} \times 250 \cos 10^{10} t$$

$$J_{desl} = 22.1 \cos 10^{10} t \ \ (A/m^2)$$

Para a mesma amplitude máxima:

$$\sigma = \varepsilon\omega$$

$$\omega = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{5.0}{8.85 \times 10^{-12}} = 5.65 \times 10^{11} \ \ rad/s$$

$$f = \frac{w}{2\pi} = 89.5 \ GHz$$

Exemplo 24.2

Um capacitor co-axial com raio interno igual a 5 mm, raio externo 6 mm, comprimento de 500 mm tem um dielétrico com ε_r = 6,7. Se uma tensão de 250sen377t é aplicada, determine a corrente de deslocamento e compare-a com a corrente de condução.

Solução

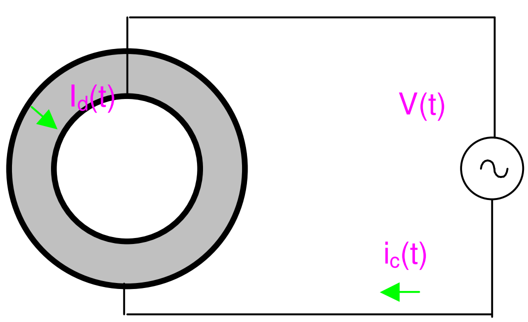

Figura 24.5 – Capacitor co-axial

Neste exemplo, a corrente entre as placas do capacitor será do tipo corrente de deslocamento, e a corrente no condutor externo corrente de condução. Subentende-se que o dielétrico é sem perdas.

Da Teoria de circuitos:

$$i_c = C\frac{dV}{dt}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{\ln(r_0/r_1)} = 1.02 \times 10^{-9} \ F$$

$$i_c = 1.02 \times 10^{-9} \times 377 \times 250 \cos 377t$$

$$i_c = 9.63 \times 10^{-5} \cos 377t \ A$$

Da teoria eletromagnética:

O potencial entre as placas do capacitor obedece à equação de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

Em coordenadas cilíndricas, ela se reduz a:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

Integrando uma vez em relação a r:

$$r\frac{dV}{dr} = A$$

Integrando pela segunda vez em relaçao a r:

$$V = A \times \ln(r) + B$$

Utilizando as condições de contorno:

$$0 = A \times \ln 0.005 + B$$

e

$$250 \operatorname{sen} 377t = A \times \ln 0.006 + B$$

Resulta:

$$A = \frac{250 \operatorname{sen} 377t}{\ln(0.006/0.005)}$$

$$B = \frac{250 \operatorname{sen} 377t}{\ln(0.006/0.005)} \ln(0.005)$$

$$V = \frac{250 \operatorname{sen} 377t}{\ln(0.006/0.005)} \ln r + \frac{250 \operatorname{sen} 377t}{\ln(0.006/0.005)} \ln(0.005)$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{E} = -\frac{250 \operatorname{sen} 377t}{\ln(0.006/0.005)} \frac{1}{r} \hat{a}_r$$

$$\vec{J}_d = \varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt}$$

$$\vec{J}_d = -\frac{30.6 \times 10^{-6}}{r} \cos 377t \hat{a}_r$$

$$i_d = J_d \times S$$

$$i_d = -9.63 \times 10^{-5} \text{ A}$$

o que comprova que a corrente de deslocamento, dentro do capacitor, é igual à corrente de condução, no condutor externo. O sinal menos obtido não afeta a nossa resposta, pois é fruto de arbitrariedades ao se impor direções e condições de contorno.

24.2 – Relações Gerais de Campo

Em ocasião anterior foi mostrado que a divergência do campo magnético é nula, ou seja :

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \tag{24.18}$$

E do calculo vetorial, sabe-se que a seguinte relação é válida, para qualquer função vetorial $\vec{F}$:

$$\nabla \bullet \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0 \tag{24.19}$$

Ficando demonstrada a existência de um vetor potencial magnético $\vec{A}$, tal que :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{24.20}$$

Por outro lado, a lei da Faraday expressa na forma pontual é :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{24.21}$$

Substituindo (24.20) em (24.21), teremos, portanto :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \left(\nabla \times \vec{A}\right)}{\partial t} \tag{24.22}$$

Ou :

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{24.23}$$

Desde que o rotacional da expressão entre parêntesis é igual a zero, ela deve ser igual ao gradiente de uma função escalar. Assim, podemos escrever :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \nabla f \tag{24.24}$$

Onde f é uma função escalar. Fazendo $f = -V$, o vetor intensidade pode ser escrito de uma forma generalizada, servindo tanto para campos elétricos variantes no tempo, como para campos elétricos estáticos :

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{24.25}$$

Relembrando, as expressões clássicas para o potencial escalar eletrostático, e para o vetor potencial magnético são, respectivamente :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_v \frac{\rho}{R} dv \tag{24.26}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}}{R} dv \tag{24.27}$$

Em termos da Equação de Poisson, temos :

$$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon \tag{24.28}$$

Para campos elétricos e :

$$\nabla^2 A = \mu \left(-J - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \right) \tag{24.29}$$

Para campos magnéticos lineares

24.3 - As Equações de Maxwell para Campos Variáveis no Tempo.

No capítulo 15 estabelecemos as 4 equações de Maxwell para campos elétricos e magnéticos estáticos (invariantes no tempo). Elas podem ser escrito tanto na forma integral:

$$\oint_l \vec{H}.d\vec{L} = \int_s \vec{J} d\vec{S} \tag{24.30}$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{L} = 0 \tag{24.31}$$

$$\int_s \vec{D}.d\vec{S} = \int_v \rho dV \tag{24.32}$$

$$\int_s \vec{B}.d\vec{S} = 0 \tag{24.33}$$

Ou na forma diferencial :

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \tag{24.34}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{24.35}$$

$$\nabla . \vec{D} = \rho \tag{24.36}$$

$$\nabla . \vec{B} = 0 \tag{24.37}$$

As 4 equações de Maxwell podem também ser escritas, considerando-se campos elétricos e magnéticos variáveis no tempo. Na forma diferencial temos:

$$\oint \vec{H}.d\vec{L} = \int \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \tag{24.38}$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{L} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \tag{24.39}$$

$$\int_s \vec{D}.d\vec{S} = \int_v \rho dV \tag{24.40}$$

$$\int_s \vec{B}.d\vec{S} = 0 \tag{24.41}$$

E na forma diferencial :

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{24.42}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{24.43}$$

$$\nabla . \vec{D} = \rho \tag{24.44}$$

$$\nabla . \vec{B} = 0 \tag{24.45}$$

Observe que a 3ª e 4ª equação não mudam em relação aos campos estáticos. A segunda equação corresponde à lei de Faraday, considerando efeito variacional da tensão induzida.

24.2-1 - Equações de Maxwell no Espaço Livre

Quando Maxwell formulou as suas equações, a sua maior preocupação era demonstrar a existência de ondas eletromagnéticas se propagando no espaço livre. Neste caso, não existirá corrente de condução, nem densidades de cargas livres. Assim as equações podem ser simplificadas:

$$\oint \vec{H}.d\vec{L} = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \tag{24.46}$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{L} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \qquad (24.47)$$

$$\int_s \vec{D}.d\vec{S} = 0 \qquad (24.48)$$

$$\int_s \vec{B}.d\vec{S} = 0 \qquad (24.49)$$

E na forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (24.50)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (24.51)$$

$$\nabla . \vec{D} = 0 \qquad (24.52)$$

$$\nabla . \vec{B} = 0 \qquad (24.53)$$

ou:

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (24.54)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (24.55)$$

$$\nabla . \vec{E} = 0 \qquad (24.56)$$

$$\nabla . \vec{H} = 0 \qquad (24.57)$$

24.2.-2 Equações de Maxwell para Campos Variantes Harmonicamente com o Tempo

Finalmente apresentamos as formulações das equações de Maxwell para campos eletromagnéticos que variam harmonicamente com o tempo (não necessariamente o espaço livre). Considerando uma variação do tipo e^{jwt}, elas podem ser escritas como:

$$\oint_s \vec{H}.d\vec{L} = (\sigma + j\omega\varepsilon) \int_s \vec{E} d\vec{S} \qquad (24.59)$$

$$\oint_l \vec{E}.d\vec{L} = -j\omega\mu \int_s \vec{H} d\vec{S} \qquad (24.60)$$

$$\int_s \vec{D}.d\vec{S} = \int_v \rho dV \qquad (24.61)$$

$$\int_s \vec{B}.d\vec{S} = 0 \qquad (24.62)$$

E na forma diferencial

$$\nabla \times \vec{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon) \vec{E}$$

(24.63)

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

(24.64)

$$\nabla . \vec{D} = 0$$

(24.65)

$$\nabla . \vec{B} = 0$$

(24.66)

Deste último grupo de equações partiremos para formular a equação de onda eletromagnética.

EXERCÍCIOS

1)- Conhecida a densidade de corrente de condução num dielétrico dissipativo, J_c 0,02 sen i0^9 t(A/m^2), encontre a densidade de corrente de deslocamento se σ 10^3 Sim e ε = 6,5.
1,15x10^{-6} cos10^{-9}t (A/m^2)

2)- Um condutor de seção reta circular de 1,5 mm de raio suporta uma corrente i_c = 5,5 sen4x10^{10} t (μA). Quanto vale a amplitude da densidade de corrente de deslocamento, se σ = 35 MS/m ε_r = 1
7,87x10^{-3} μA/m^2

3)- Descubra a freqüência para a qual as densidades de corrente de condução e deslocamento são idênticas em (a) água destilada, onde σ = 2,0×10^{-4} S/m, ε_r = 81; *(b)* água salgada, onde σ= 4,0 S/m e ε_r = 1.
(a) 4,44 x 104 Hz;(b) 7,19 x 1010 Hz

4)- Duas cascas esféricas condutoras concêntricas com raios r_1 = 0,5 mm e r_2 = 1 mm, acham-se separadas por um dielétrico de ε_r = 8,5. Encontre a capacitância e calcule i_c dada uma tensão aplicada v = 150sen5000t(V). Calcule a corrente de deslocamento i_D e compare-a com i_c.
ic = iD = 7,09×10-7cos5000t (A)

5)- Duas placas condutoras planas e paralelas de área 0,05 m^2 acham-se separadas por 2 mm de um dielétrico com perdas com ε_r= 8,3 e σ = 8,0×10^{-4}S/m. Aplicada uma tensão *v* = 10 sen 10^7 t (V), calcule o valor rms da corrente total.
0,192 A

6)- Um capacitor de placas paralelas, separadas por 0,6 mm e com um dielétrico de ε_r = 15,3 tem uma tensão aplicada de rms 25 V na frequência de 15 GHz. Calcule o rms da densidade de corrente de deslocamento. Despreze o espraiamento.
5,32×105 A/m2