Sumário

Espaço SENAI

Missão do Sistema *SENAI*

Contribuir para o fortalecimento da indústria e o desenvolvimento pleno e sustentável do País, promovendo a educação para o trabalho e a cidadania, a assistência técnica e tecnológica, a produção e disseminação de informação e a adequação, geração e difusão de tecnologia.

Nosso negócio

Educação para o Trabalho e Cidadania.

Introdução

Nos circuitos onde existem apenas tensões contínuas a tarefa de analisar e compreender seu funcionamento não representa grande dificuldade, tendo em vista que os valores são estáticos e podem ser medidos a qualquer momento.

Já nos circuitos alimentados por CA ou onde existem sinais alternados a análise tende a tornar-se mais trabalhosa, devido ao fato de os valores de tensão e corrente estarem em constante modificação.

Por essa razão é comum representar os parâmetros elétricos de um circuito de CA através de fasores, o que simplifica principalmente a determinação de valores através de cálculos.

Este fascículo, que tratará da defasagem entre grandezas CA, de fasores e da representação fasorial de parâmetros elétricos CA, tem por objetivo fornecer as informações necessárias para que o leitor use os fasores como "ferramenta" para simplificar a análise de circuitos de CA.

É importante que o conteúdo deste fascículo seja bem assimilado porque será utilizado amplamente nos fascículos que seguem.

Para ter sucesso no desenvolvimento do conteúdo deste fascículo, o leitor já deverá ter conhecimentos relativos a:

- Tensão e corrente alternada.

Relação de fase entre grandezas CA

A relação de fase é uma comparação entre os momentos em que os fenômenos elétricos acontecem. Pode-se, por exemplo, estabelecer uma relação de fase entre duas tensões CA de mesma freqüência. Para isto, escolhe-se um momento como ponto de referência, normalmente o pico do ciclo positivo (ou negativo) de uma das tensões CA, como mostrado na **Fig.1**.

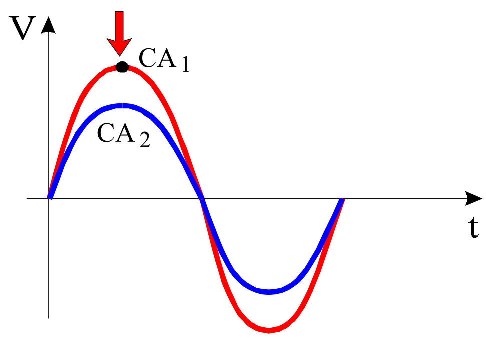


Fig.1 Ponto de referência da tensão alternada CA_1.

Verifica-se em seguida a outra tensão no circuito neste mesmo momento, conforme mostrado na **Fig.2**.

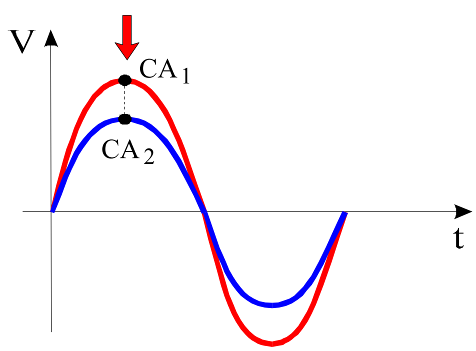


Fig.2 Tensão CA_2 no mesmo momento que ocorre o pico na tensão CA_1.

Ao se comparar a segunda tensão CA_2 com a tensão CA_1 de referência, pode ocorrer uma das três situações apresentadas graficamente na **Fig.3**.

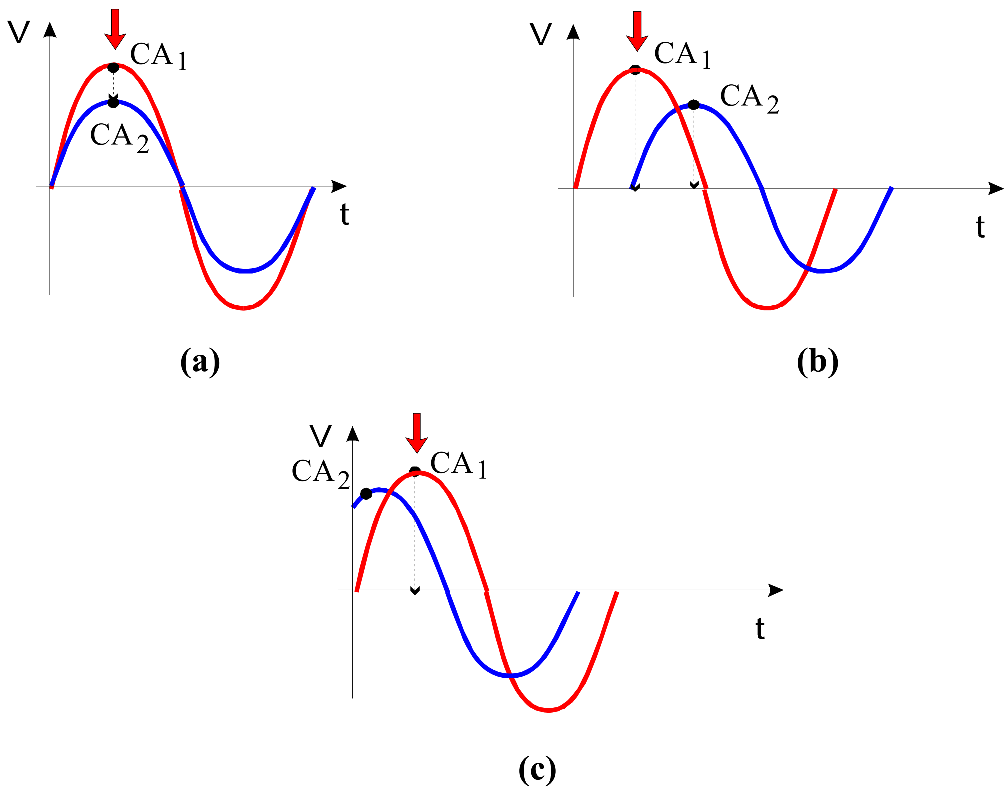


Fig.3 Posições possíveis do pico de tensão do semiciclo positivo de uma tensão CA com respeito a uma tensão de referência.

Na situação (a), o pico positivo da tensão CA_1 coincide com o pico positivo da tensão CA_2 no mesmo instante.

Nesta situação, diz-se que as tensões CA_1 e CA_2 estão em fase.

Duas tensões CA estão em fase quando seus picos positivos e negativos ocorrem ao mesmo tempo.

Nas outras duas situações (b) e (c), as tensões CA_1 e CA_2 atingem os valores máximos (picos positivos e negativos) em instantes diferentes.

Quando isto ocorre, diz-se que as tensões CA_1 e CA_2 estão defasadas.

Duas tensões CA estão defasadas quando seus picos (positivos ou negativos) ocorrem em momentos diferentes.

Observando os gráficos em que as tensões CA_1 e CA_2 estão defasadas, verifica-se que estes gráficos apresentam diferenças entre si.

No gráfico da **Fig.3b**, o ponto de referência da tensão CA_1 (pico positivo), ocorre antes do pico positivo da tensão CA_2. A tensão CA_2 atingirá o pico positivo depois da CA_1. Neste caso, diz-se que a tensão CA_2 está **atrasada** com relação a CA_1 ou a tensão CA_1 está **adiantada** com relação a CA_2.

No gráfico da **Fig.3c**, a tensão CA_1 atingirá o pico positivo depois da CA_2. Neste caso, diz-se que a tensão CA_2 está adiantada em relação a tensão CA_1 ou a tensão CA_1 está **atrasada** em relação a tensão CA_2.

Ângulo de defasagem entre grandezas CA

O adiantamento ou atraso de uma tensão CA em relação a outra é dado em graus (º). Um ciclo completo de uma CA corresponde a 360º, como mostrado na **Fig.4**.

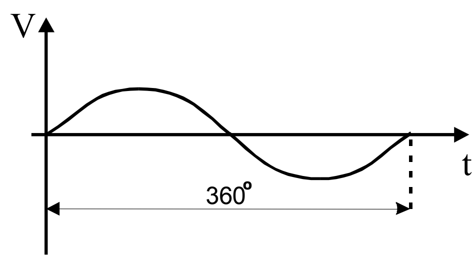


Fig.4 Ciclo completo de uma CA.

Por conseqüência, como mostrado na **Fig.5**, tem-se que: um semiciclo de uma CA tem 180º, meio semiciclo de uma CA tem 90º e um quarto de semiciclo de uma CA tem 45º.

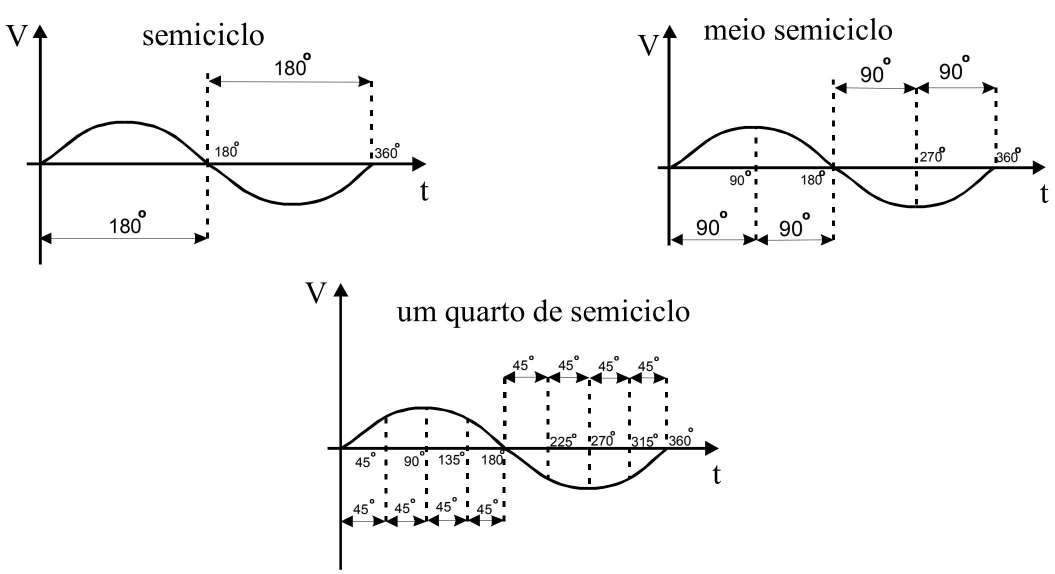


Fig.5 Subdivisões de um ciclo de uma CA.

Com base nesta divisão do eixo horizontal, pode-se determinar de quantos graus é a defasagem entre uma tensão CA e a outra.

As **Figs. 6, 7, 8** mostram exemplos de tensões CA defasadas.

pico positivo de CA_1 : 90º

pico positivo de CA_2 : 180º

defasagem : 180º - 90º = 90º

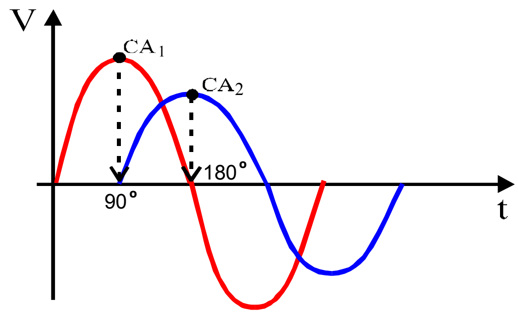


Fig.6 CA_2 está atrasada 90º com relação a CA_1.

pico positivo de CA_1 : 135º

pico positivo de CA_2 : 90º

defasagem : 135º - 90º= 45º

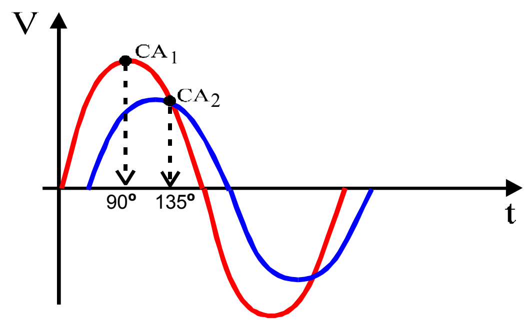


Fig.7 CA_1 está atrasada 45º em relação a CA_2.

pico positivo de CA_1 : 60º

pico positivo de CA_2 : 200º

defasagem : 140º

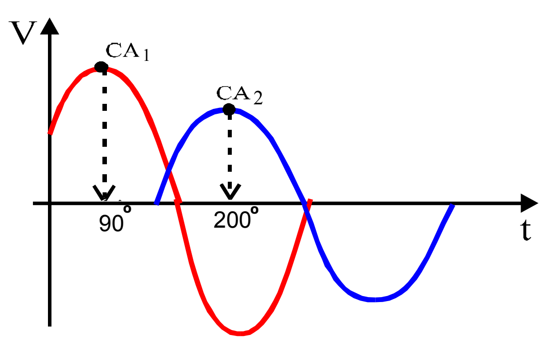


Fig. 8 CA_2 está atrasada 140º em relação a CA_1.

Existe ainda um caso particular de defasagem, como mostrado na **Fig.9**.

pico positivo de CA_1 : 90º

pico positivo de CA_2 : 270º

defasagem : 180º

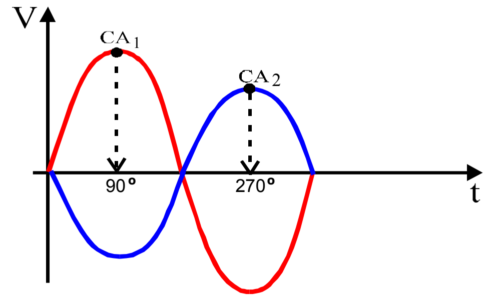


Fig. 9 CA_1 e CA_2 em oposição de fase

Neste caso, diz-se apenas que CA_1 está em **oposição de fase** com CA_2 ou que CA_1 e CA_2 estão em **anti-fase**.

Vetores

Existem grandezas que podem ser expressas simplesmente por um número e uma unidade. Por exemplo, quando se diz que a temperatura em um determinado momento é de 20º C, a informação que se quer dar é perfeitamente compreensível. Este tipo de grandeza é chamada de **grandeza escalar**. Alguns exemplos de grandezas escalares são: o tempo, a distância e a massa.

Para algumas grandezas, entretanto, um número e uma unidade não são suficientes.

Suponha a seguinte atuação: em meio a uma guerra, um general envia a seguinte mensagem ao comandante da tropa que está no fronte de batalha: ***"desloque o seu regimento 6km do ponto atual o mais breve possível".***

O comandante certamente ficará em situação difícil, pois a mensagem não diz se o deslocamento deve ser para o norte, sul, leste oeste ou mesmo para direções intermediárias.

Pelo exemplo, conclui-se que para definir um deslocamento não é suficiente dizer apenas de quanto este deve ser.

Grandezas como o deslocamento são denominadas de **grandezas vetoriais**. Outros exemplos de grandezas vetoriais são: a força, a velocidade e o campo elétrico.

Para a perfeita determinação de uma grandeza vetorial são necessárias três informações:

- Um valor numérico, denominado de módulo.
- Uma direção.
- Um sentido.

Assim, o comandante não teria tido dúvidas se a mensagem do general fosse: “Desloque o seu regimento 6km do ponto atual, na direção norte - sul, sentido do sul o mais breve possível”.

Uma grandeza vetorial pode ser representada graficamente através de um segmento de reta orientada denominado de **vetor**.

A **Fig. 10** mostra alguns vetores.

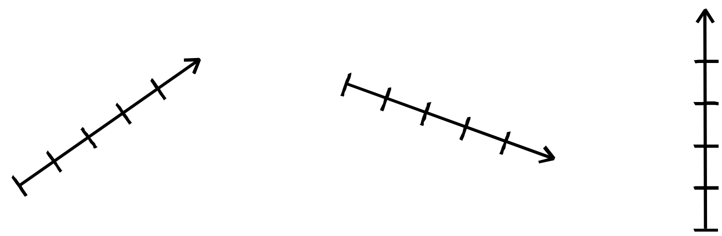


Fig.10 Vetores.

Como se pode observar, em qualquer um dos vetores da **Fig.10,** esta representação gráfica fornece as três informações necessárias a respeito da grandeza vetorial.

A **Fig.11** mostra um vetor e sua reta suporte com a indicação de seu módulo, sua direção e seu sentido.

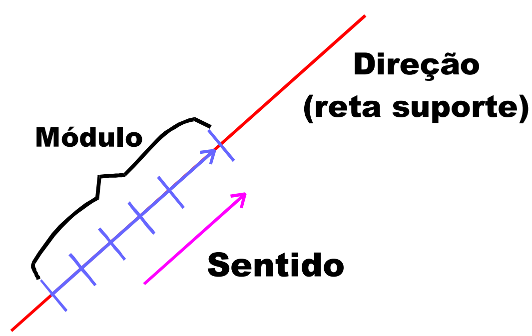


Fig.11 Módulo, direção e sentido de um vetor.

Os vetores constituem-se em fator de simplificação na análise de situações diárias.

Supondo-se, por exemplo, que alguém deseje levar uma mesinha com a televisão do canto esquerdo da sala para o canto direito e está pensando em como fazê-lo, como ilustrado na **Fig.12**. Intuitivamente, qualquer pessoa sabe que terá que empurrar ou puxar a mesinha com uma determinada força para que isto aconteça.

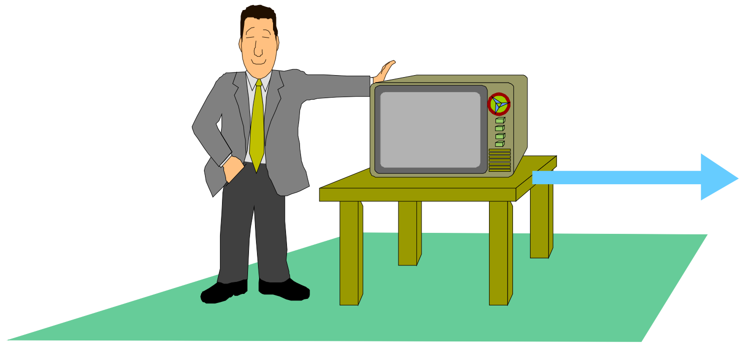


Fig.12 Deslocamento de uma mesa.

Esta força pode ser representada através do vetor da **Fig.13**.

- Módulo: valor numérico da força para movimentar a mesinha.
- Direção: horizontal.
- Sentido: da esquerda para direita.

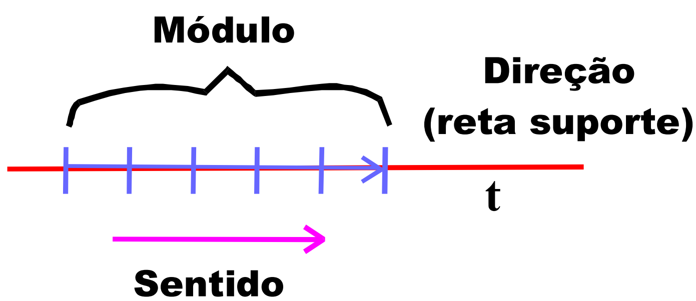


Fig.13 Vetor força.

RESULTANTE DE UM SISTEMA DE VETORES

Em muitas situações existe mais de uma força atuando sobre o mesmo ponto ao mesmo tempo. Nestes casos, empregar uma representação gráfica simplifica a determinação de uma solução.

Suponha, por exemplo, que uma pessoa precise puxar a caixa pesada ilustrada na **Fig.14**. Ao tentar, esta pessoa conclui que sozinha não consegue movimentar a caixa.

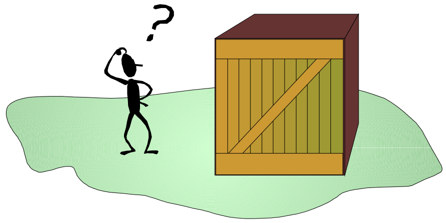


Fig.14 Deslocamento de uma caixa pesada.

A solução é pedir ajuda, incluindo mais uma força no sistema. Naturalmente esta segunda força tem que atuar na mesma direção e sentido e no mesmo ponto de aplicação que a primeira para que o resultado (resultante) seja o desejado.

A resultante, neste caso, será a soma das duas forças, atuando na mesma direção e sentido das forças individuais.

A **Fig.15** mostra a representação completa do sistema de forças e sua resultante.

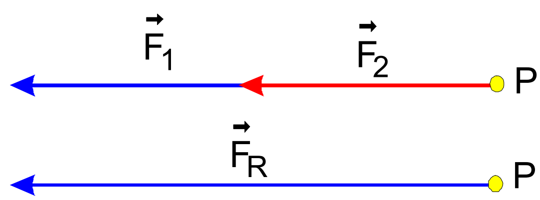


Fig.15 Sistema de forças e sua resultante.

Então, pode-se afirmar que se duas forças F_1 e F_2 aplicadas no mesmo ponto e atuando tem na mesma direção e mesmo sentido, o vetor resultante tem as seguinte características:

- Módulo: F_1+F_2.
- Direção: a da reta que contém as duas forças.
- Sentido: o mesmo das forças.

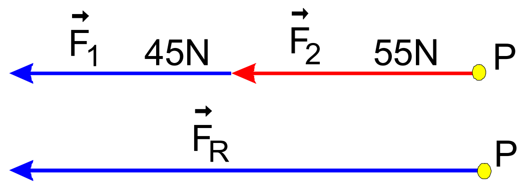
Exemplo 1:

Duas pessoas puxam, na mesma direção e sentido uma corda presa a uma carga. A primeira exerce uma força de 45N e a segunda uma força de 55N. Qual o módulo, a direção e o sentido da força resultante?

Observação: Newton (N) é a uma unidade de medida de força.

<u>**Solução**</u>:

Desenhando-se o diagrama vetorial, tem-se que:



Módulo do vetor resultante: $F_R = 45N + 55N = 100N$
Direção do vetor resultante: a mesma das forças aplicadas (horizontal).
Sentido do vetor resultante: o mesmo das forças aplicadas (direita para esquerda).

Em algumas situações, as forças de um sistema têm a mesma direção, mas sentidos opostos.

Imagine, por exemplo, a brincadeira de "cabo de guerra" mostrada na **Fig.16**.

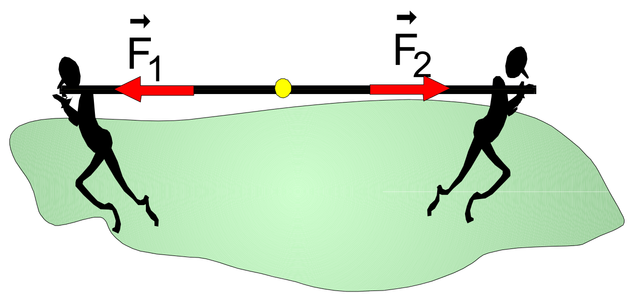


Fig.16 "Cabo de guerra".

Este é um exemplo típico de sistema onde as forças atuam na mesma direção (a da corda) e em sentidos opostos.

Considerando a corda como ponto de aplicação das forças, o sistema pode ser representado conforme a **Fig.17**.

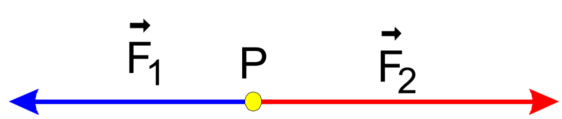


Fig.17 Diagrama vetorial do "cabo de guerra".

A resultante neste caso, será o resultado da subtração de uma força da outra, com a direção mantida (a da corda) e o sentido da força maior, como mostrado na **Fig.18**.

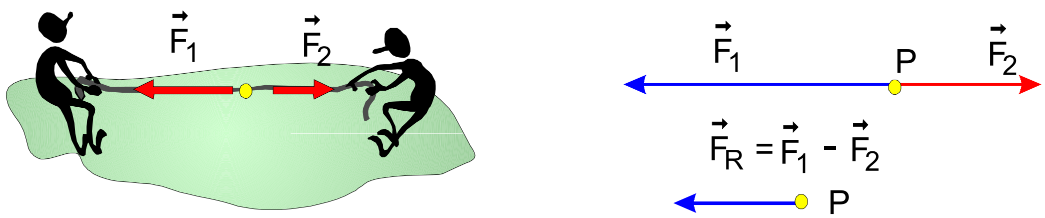


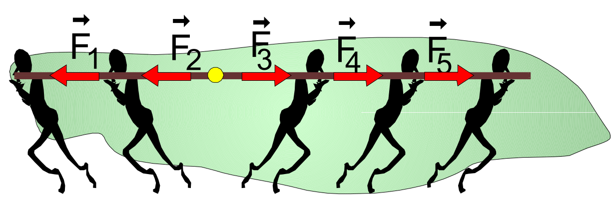
Fig.18 Forças em direções opostas.

Se duas forças F_1 e F_2 aplicadas ao mesmo ponto atuam na mesma direção e em sentidos opostos, têm-se para a resultante que:

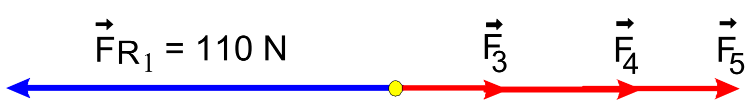
Módulo: $F_1 - F_2$ (a maior menos a menor).
Direção: a da reta que contém as duas forças.
Sentido: o da força maior.

<u>Exemplo 2</u>:

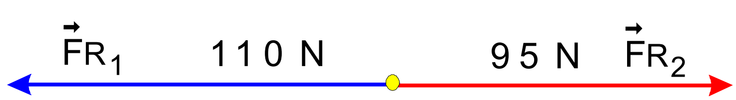
Determinar a resultante do sistema de forças da figura abaixo.



Primeiro, verifica-se que F_1 e F_2 atuam na mesma direção e sentido, podendo ser substituídas por uma resultante parcial FR_1.



Da mesma forma pode ser feito com F_3, F_4 e F_5, substituindo por uma resultante parcial FR_2.



Agora é possível determinar a resultante do sistema FR como sendo :

FR = 110N-95N = 15N.
Direção = a da corda (horizontal).
Sentido = o da maior força (para a esquerda).

Existe ainda uma terceira situação em que forças aplicadas no mesmo ponto não têm a mesma direção.

Supondo-se, por exemplo, dois rebocadores puxando um transatlântico através de dois cabos, conforme mostrado na **Fig.19**.

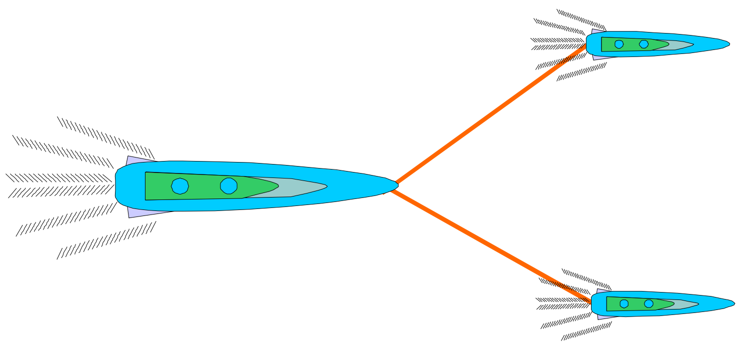


Fig.19 Transatlântico puxado por dois cabos.

O ponto de aplicação das forças é o mesmo (o transatlântico), porém as direções são diferentes, como pode ser visto na **Fig. 20**.

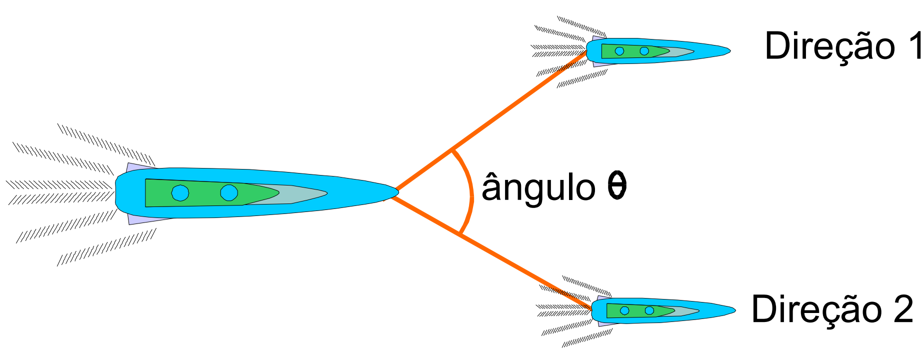


Fig. 20 Ângulo entre as forças produzidas pelos rebocadores.

Neste caso a forma mais simples de encontrar a solução é a forma gráfica pela **Regra do Paralelogramo**.

Deve-se colocar em um papel os dois vetores, desenhados em escala com o ângulo correto entre eles, como mostrado na **Fig.21**.

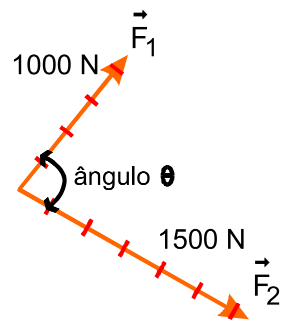


Fig.21 Diagrama vetorial da situação mostrada na **Fig.19**.

Então, traça-se pela extremidade de cada um dos vetores dados uma linha tracejada, paralela ao outro, como mostrado na **Fig.22**.

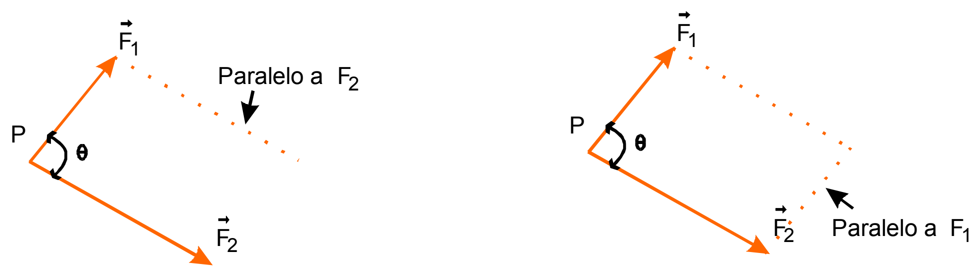


Fig.22 Aplicação da regra do paralelogramo.

Forma-se assim um paralelogramo cuja diagonal é a resultante, conforme ilustrado na **Fig.23**.

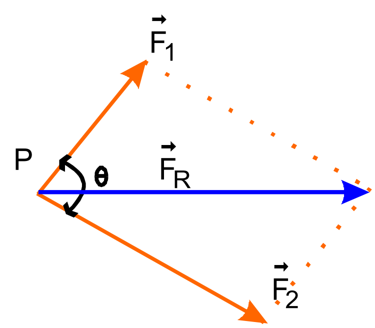


Fig.23 Formação gráfica da resultante.

Medindo-se a resultante com a mesma escala usada para os vetores componentes, tem-se o módulo da resultante.

A direção e o sentido ficam estabelecidos automaticamente no traçado gráfico.

Um caso particular desta situação é quando há um ângulo de 90º entre as forças. A **Fig.24** mostra esta situação.

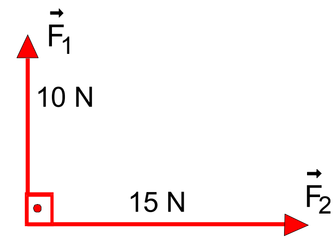


Fig.24 Aplicação de duas forças que formam um ângulo de 90°.

A resolução gráfica da **Fig.24** mostra que o paralelogramo formado é um retângulo onde a resultante é diagonal, como mostrado na **Fig.25**.

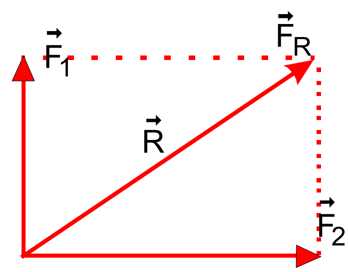


Fig.25 Força resultante.

Trocando-se um dos vetores de posição, forma-se um triângulo retângulo em que F_1 e F_2 são os catetos e R é a hipotenusa, como mostrado na **Fig.26**.

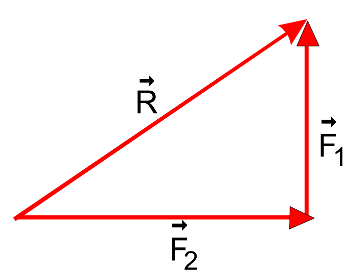


Fig.26 Triângulo retângulo tendo a hipotenusa como resultante.

Neste caso, o módulo dos vetores se relacionam segundo o teorema de Pitágoras:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 \qquad (1)$$

Se duas forças F_1 e F_2 aplicadas ao mesmo ponto formam um ângulo de 90º entre si, a resultante é dada pelo teorema de Pitágoras, ou seja: $\mathbf{R = \sqrt{(F_1)^2 + (F_2)^2}}$.

O ângulo formado entre os vetores componentes e o resultante é dado pelas relações trigonométricas.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{F_1}{R} \qquad (2)$$

$$\cos\theta = \frac{F_2}{R} \qquad (3)$$

<u>Exemplo 3</u>:

Dois rebocadores de 15.000N cada um traciona um transatlântico. Sabendo-se que o ângulo entre os cabos dos dois é de 90º, determinar o módulo da resultante e o ângulo desta com relação ao rebocador.

<u>Solução</u>:

$$R = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2}} = \sqrt{\mathbf{15.000^2 + 15.000^2}} = 21.213\text{N}$$

$$\cos\theta = \frac{F_1}{R} = \frac{15000}{21213} = 0.707$$

$$\theta = 45°$$

O transatlântico se deslocará em uma trajetória que forma um ângulo de 45º com o cabo do rebocador 1.

Fasores

A análise do comportamento e dos parâmetros de um circuito em CA apresenta certas dificuldades porque os valores de tensão e corrente estão em constante modificação.

Mesmo os gráficos senoidais, que podem ser utilizados com este objetivo, tornam-se complexos quando há várias tensões ou correntes envolvidas com defasagem entre si.

Por este motivo é muito comum empregar gráficos fasoriais em substituição aos senoidais.

Do mesmo modo que o comprimento de um segmento de reta, a sua direção e a sua orientação no espaço representam uma série de grandezas físicas, chamadas então de grandezas vetoriais, existe também uma forma de representar graficamente as grandezas tensão e corrente elétrica senoidais.

Por exemplo, a tensão alternada

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \tag{4}$$

de amplitude V_m, frequência angular ω (rads/s) e fase ϕ (rad ou graus) pode ser representada no plano cartesiano como mostrado na **Fig. 27**.

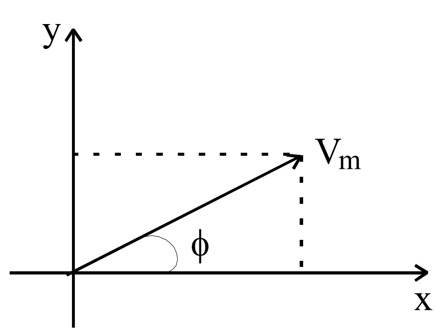


Fig. 27 Representação fasorial de uma tensão alternada.

O estudo dos números complexos nos revela que esta é a representação do número $V_m\ e^{j\phi}$, que na teoria dos circuitos elétricos recebe o nome especial de fasor.

Note que na representação fasorial da tensão senoidal $V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$, apenas a amplitude da tensão V_m e o ângulo de fase ϕ são especificados, devendo então a frequência angular ser fornecida a parte.

A representação fasorial de uma tensão ou corrente alternada é muito útil, pois nos possibilita visualizar o comportamento relativo dessas grandezas.

Nos gráficos fasoriais, um segmento de reta pode ser usado para representar a tensão ou corrente eficaz correspondente a uma CA senoidal. A **Fig.28** ilustra este princípio.

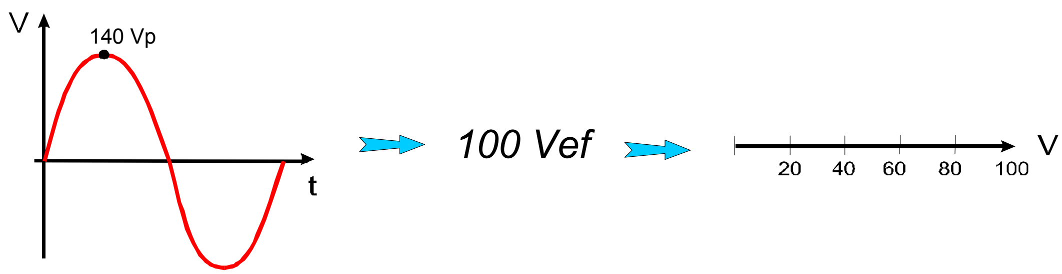


Fig.28 Representação fasorial de uma onda senoidal.

O sistema de gráficos fasoriais permite a representação de qualquer número de tensões com quaisquer defasagens. O ângulo de defasagem entre as tensões CA é representado graficamente por um ângulo entre os fasores.

REPRESENTAÇÃO FASORIAL DE GRANDEZAS SENOIDAIS EM FASE

Quando duas CA estão em fase, pode-se dizer que o ângulo de defasagem entre elas é 0º. A **Fig.29** mostra um exemplo.

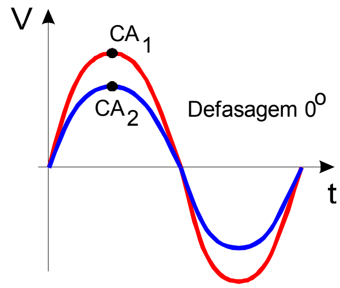


Fig.29 Exemplo de duas tensões alternadas em fase.

Esta situação pode ser representada fasorialmente, considerando-se três aspectos:

- Um segmento de reta representa o valor eficaz de CA_1.
- Outro segmento de reta representa o valor eficaz de CA_2.
- O ângulo entre os dois fasores representa o ângulo de defasagem, que neste caso é de 0º.

A **Fig.30** mostra o gráfico senoidal e vetorial de duas CA em fase.

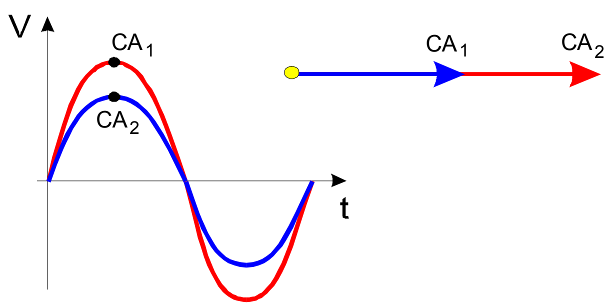


Fig.30 Gráfico senoidal e fasorial de duas tensões alternadas em fase.

REPRESENTAÇÃO FASORIAL DE GRANDEZAS SENOIDAIS DEFASADAS

Para representar grandezas senoidais defasadas, os princípios são os mesmos:

- Um segmento de reta para cada grandeza.
- Um ângulo entre os fasores que expressa a defasagem.

Há porém alguns cuidados a serem observados. Sempre que se observa um gráfico de grandezas senoidais defasadas toma-se uma das grandezas como referência para depois verificar se as outras estão adiantadas ou atrasadas em relação a estas.

Para os gráficos fasoriais obedece-se o mesmo princípio. Em geral, costuma-se traçar um sistema de eixos ortogonais que servirá de base para o gráfico e traçar o fasor de referência no sentido horizontal para a direita, como mostrado na **Fig.31**.

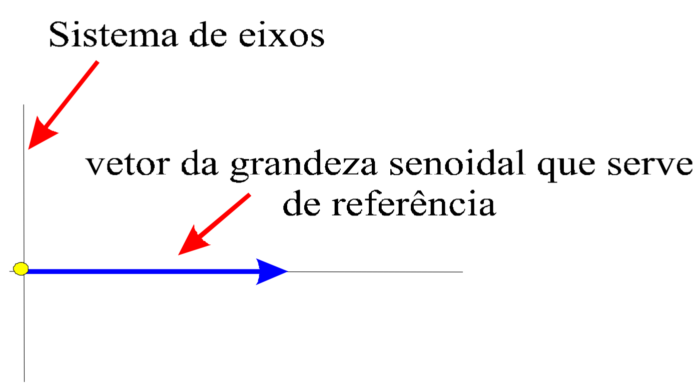


Fig.31 Traçado do fasor de referência.

Veja, por exemplo, o gráfico senoidal apresentado na **Fig.32** com a CA_1 tomada como referência.

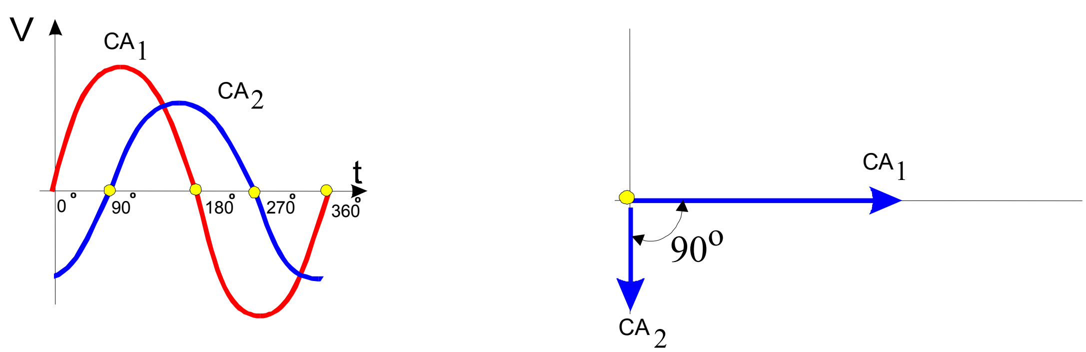


Fig.32 Tensões senoidais CA_1 (referência) e CA_2.

A partir do fasor de referência, posiciona-se os demais fasores. Fasores colocados no sentido horário estão atrasados com relação a referência e vice versa, como mostrado na **Fig.33**.

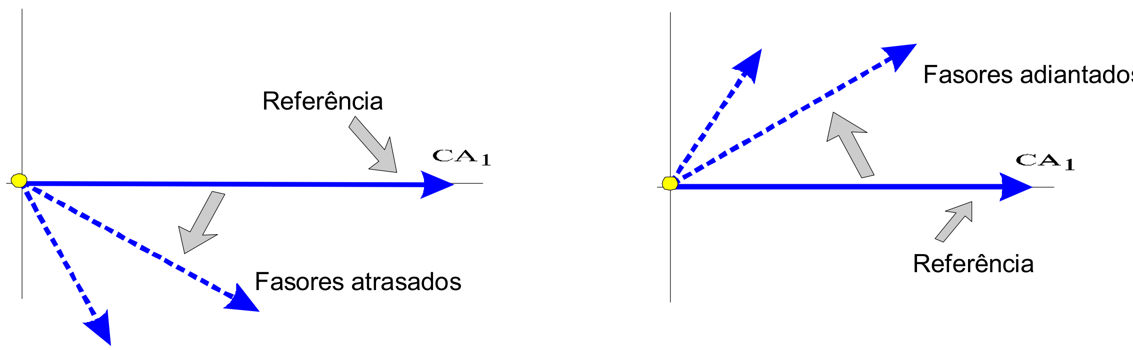


Fig.33 Fasores atrasados e adiantados.

No gráfico senoidal usado como exemplo, a CA_2 está atrasada 90º com relação a CA_1, de forma que o gráfico se apresenta conforme a **Fig.34**.

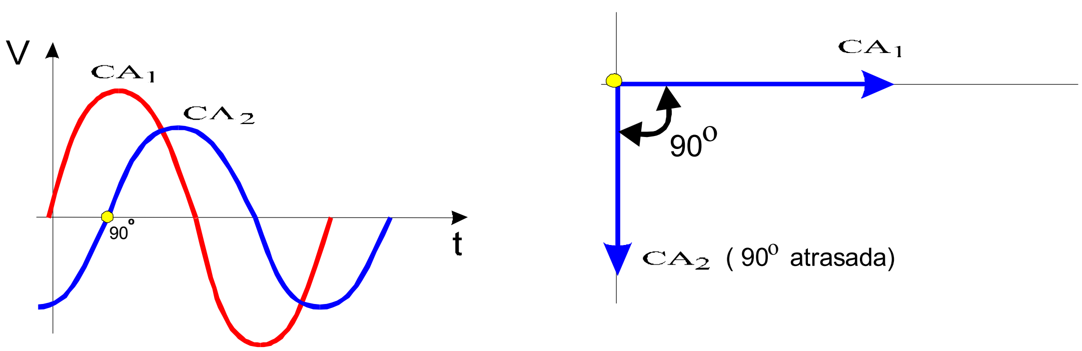
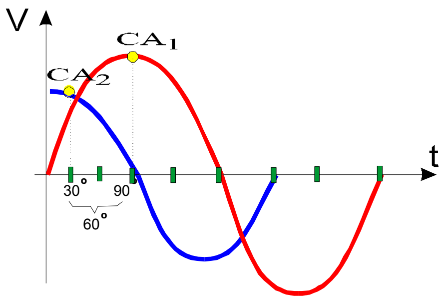
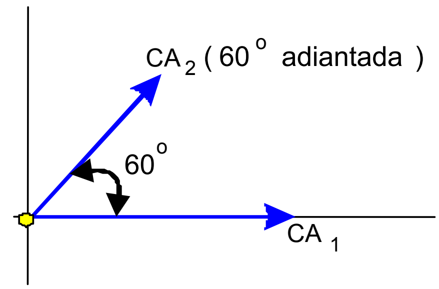
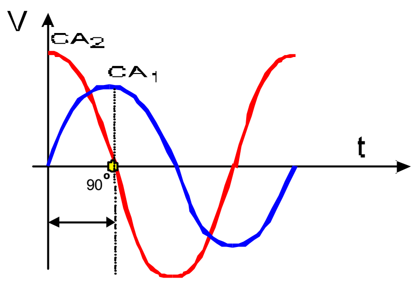


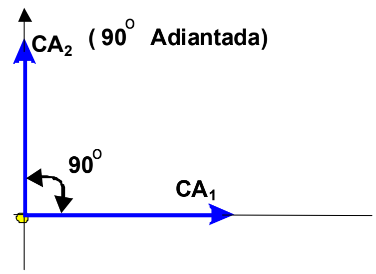
Fig.34 Vetor atrasado 90º .

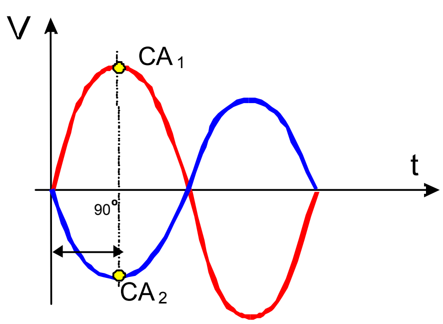
A seguir estão colocados alguns exemplos de gráficos senoidais e seus respectivos gráficos vetoriais. Os valores apresentados nos gráficos senoidais são valores eficazes.

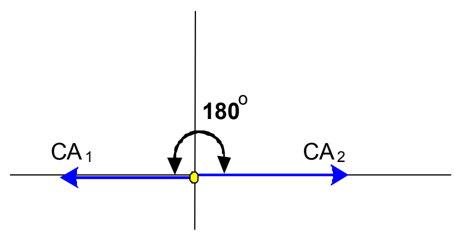

V
CA1
CA2
t
30°
90
60°


CA 2 (60 o adiantada)
60 o
CA 1


V
CA2
CA1
t
90°


CA2 (90o Adiantada)
90o
CA1


V
CA 1
t
90°
CA 2


180o
CA 1
CA 2

Apêndice

QUESTIONÁRIO

1. Quando se pode afirmar que duas tensões alternadas estão em fase ?

2. Esboce um diagrama fasorial de duas tensões alternadas defasadas.

BIBLIOGRAFIA

DAWES, CHESTER L. **Curso de Eletrônica**; corrente alternada. (A course in electrical engeneering) Trad. de João Protássio Pereira da Costa. 18.ª ed., Porto Alegre, Globo, 1979, vol.4

SOUZA, HIRAN R. DE. **Estática**. São Paulo, PRO-TEC, 1977.

TEIXEIRA JÚNIOR, ANTÔNIO DE SOUZA. **Física**, Curso Colegial. 13.ª ed., São Paulo, Brasil, 1965, vol.1 (Coleção Didática do Brasil - Série Colegial, vol.6).

VAN VALKENBURG, NOOGER & NEVILLE. **Eletricidade Básica**. 5.ª ed., Rio de Janeiro, Freitas Bastos, 1964, vol.4 il.